



UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA

RAFAEL MEDEIROS DE FREITAS

DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE ESTUDO DE DINÂMICA
NÃO LINEAR EM SISTEMAS OSCILANTES ACOPLADOS:
ABORDAGEM EXPERIMENTAL, COMPUTACIONAL E DIDÁTICA

Araguaína - TO
2025



RAFAEL MEDEIROS DE FREITAS

**DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE ESTUDO DE DINÂMICA
NÃO LINEAR EM SISTEMAS OSCILANTES ACOPLADOS:
ABORDAGEM EXPERIMENTAL, COMPUTACIONAL E DIDÁTICA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador(a): Dra. Liliana Yolanda Ancalla Davila

Coorientador: Dr. Nilo Maurício Sotomayor Choque

Araguaína - TO
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Geração de Ficha Catalográfica SGFC-UFNT
Gerado automaticamente mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F866d Freitas, Rafael Medeiros de.

Desenvolvimento de um sistema de estudo de dinâmica não linear em sistemas oscilantes acoplados: abordagem experimental, computacional e didática / Rafael Medeiros de Freitas. - Centro de Ciências Integradas - CCI, TO, 2025.

271 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) (Pós-Graduação - Programa Nacional de Mestrado Profissional em Ensino de Física - MNPEF) -- Universidade Federal do Norte do Tocantins, 2025.

Orientadora: Dra. Líliliana Yolanda Ancalla Davila.

Coorientador: Dr. Nilo Maurício Sotomayor Choque.

1. Sequência de Ensino Investigativo. 2. Osciladores Acoplados .
3. Tecnologias Educacionais Aplicadas à Física. **CDD 530.7**

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

RAFAEL MEDEIROS DE FREITAS

DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE ESTUDO DE DINÂMICA
NÃO LINEAR EM SISTEMAS OSCILANTES ACOPLADOS:
ABORDAGEM EXPERIMENTAL, COMPUTACIONAL E DIDÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, no Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador(a): Dra. Liliana Yolanda Ancalla Davila
Coorientador: Dr. Nilo Maurício Sotomayor Choque

Data de aprovação: 10/03/2025

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 LILIANA YOLANDA ANCALLA DAVILA
Data: 21/03/2025 10:38:41-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof.(a) Dra. Liliana Yolanda Ancalla Davila
(UFNT-MNPEF)

Documento assinado digitalmente
 FERNANDO LESSA CARNEIRO
Data: 23/03/2025 22:54:43-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Fernando Lessa Carneiro
Membro externo (UFNT)

Documento assinado digitalmente
 FABIO MATOS RODRIGUES
Data: 21/03/2025 11:12:35-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Fábio Matos Rodrigues
Membro interno (UFNT-MNPEF)

Dedico este trabalho à coragem de persistir nos momentos difíceis, à curiosidade que sempre me motivou a questionar, e à determinação de seguir em frente, mesmo diante dos desafios. Dedico-o também aos meus pais, cuja força e amor incondicional foram minha maior inspiração e suporte ao longo desta jornada. Que este trabalho seja um lembrete de que a caminhada é tão valiosa quanto o destino.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão às instituições que tornaram possível a realização deste estudo e a conclusão deste mestrado. Em especial à Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT), à Sociedade Brasileira de Física (SBF), à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Centro de Ensino Governador Archer (CEGA).

Estendo meus agradecimentos aos meus orientadores, Profa. Dra. Liliana Yolanda Ancalla Davila e Prof. Dr. Nilo Maurício Sotomayor Choque pela orientação dedicada, conhecimento compartilhado e paciência durante todo o processo de pesquisa. Suas orientações valiosas e insights críticos foram essenciais para o desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço aos professores e pesquisadores do programa de mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF) do polo 61 Araguaína TO, que proporcionaram um ambiente acadêmico enriquecedor e desafiador, contribuindo para o meu crescimento como estudante e pesquisador.

À minha família, pelo apoio incondicional, encorajamento e amor ao longo dos anos. Vocês foram a base que me permitiu alcançar este marco em minha vida acadêmica.

Aos amigos e colegas de classe que compartilharam essa jornada comigo, obrigado por todas as discussões construtivas, colaborações e momentos de descontração que tornaram esta jornada acadêmica mais memorável.

Por fim, quero agradecer a todas as fontes de inspiração que moldaram meu interesse por este campo de estudo e me motivaram a continuar buscando o conhecimento. Espero que esta dissertação possa contribuir, de alguma forma, para o avanço do conhecimento científico e o desenvolvimento satisfatório do ensino de Física.

Este trabalho é dedicado a todos vocês, reconheço a importância vital de cada um em minha jornada acadêmica e pessoal. Muito obrigado por fazerem parte desta realização.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas graças a Deus, não sou o que era antes.”

(Martin Luther King Jr.)

RESUMO

DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE ESTUDO DE DINÂMICA NÃO LINEAR EM SISTEMAS OSCILANTES ACOPLADOS: ABORDAGEM EXPERIMENTAL, COMPUTACIONAL E DIDÁTICA

Rafael Medeiros de Freitas

Orientador(a): Dra. Liliana Yolanda Ancalla Davila

Coorientador: Dr. Nilo Maurício Sotomayor Choque

Este trabalho fundamenta-se na metodologia Sequência de Ensino Investigativo (SEI) para averiguar a relevância e a aplicabilidade de um produto educacional constituído por um sistema de dois pêndulos simples acoplados por uma mola, com aquisição automática de dados, e por um e-book estendido que contém a descrição formal da mecânica do sistema experimental, além de sua simulação computacional, tanto numérica quanto gráfica. A proposta visa superar desafios relacionados à abstração conceitual dos fenômenos físicos por meio de uma ferramenta tecnológica visual, de baixo custo, fácil manuseio, e que promova a aproximação entre teoria e prática de forma significativa. A pesquisa utilizou ferramentas tecnológicas de fácil acesso, como a placa programável Arduino e o software de código aberto Python. A aplicação ocorreu durante as aulas da disciplina Aprofundamento II, pertencente ao novo Ensino Médio, envolvendo uma turma de 38 alunos da 2ª série do itinerário Ciências Exatas, Tecnológicas e da Terra, na escola Centro de Ensino Governador Archer (CEGA), localizada na cidade de Imperatriz, Maranhão. A metodologia foi estrategicamente estruturada com aulas expositivas e dialogadas nos primeiros encontros, com o objetivo de fomentar análises e discussões decorrentes da introdução do aparato experimental no contexto da Sequência de Ensino Investigativo (SEI). Os resultados foram obtidos a partir de observações realizadas ao longo das etapas da aplicação. O desenvolvimento de habilidades científicas, como a formulação de hipóteses, o planejamento de ações, a resolução de problemas e a organização estrutural do pensamento, evidenciou que o produto desenvolvido possui grande potencial para ser utilizado como ferramenta de ensino em diferentes contextos educacionais.

Palavras-chave: Ensino de Física; Experimentação Didática; Tecnologias Educacionais; Ensino Investigativo.

ABSTRACT

DEVELOPMENT OF A STUDY SYSTEM FOR NONLINEAR DYNAMICS IN COUPLED OSCILLATORY SYSTEMS: AN EXPERIMENTAL, COMPUTATIONAL, AND DIDACTIC APPROACH

Rafael Medeiros de Freitas

Advisor: Dra. Liliana Yolanda Ancalla Davila

Co-supervisor: Dr. Nilo Maurício Sotomayor Choque

This work is based on the Inquiry-Based Learning Sequence (IBL) methodology to investigate the relevance and applicability of an educational product consisting of a system of two simple pendulums coupled by a spring, with automatic data acquisition, and an extended e-book containing the formal description of the mechanics of the experimental system, as well as its computational simulation, both numerical and graphical. The proposal aims to overcome challenges related to the conceptual abstraction of physical phenomena through a visual, low-cost, and easy-to-use technological tool that promotes a meaningful connection between theory and practice. The research employed accessible technological tools, such as the Arduino programmable board and the open-source software Python. The application took place during the Aprofundamento II course, part of the new High School curriculum, involving a class of 38 second-year students in the Sciences, Technology, and Earth Sciences track at Centro de Ensino Governador Archer (CEGA), located in Imperatriz, Maranhão. The methodology was strategically structured with expository and dialogued lessons in the initial meetings to foster analysis and discussions arising from the introduction of the experimental apparatus in the context of the Inquiry-Based Learning Sequence (IBL). The results were obtained from observations made throughout the application stages. The development of scientific skills, such as hypothesis formulation, action planning, problem-solving, and structural organization of thought, demonstrated that the developed product has great potential to be used as a teaching tool in different educational contexts.

Keywords: Physics Teaching; Didactic Experimentation; Educational Technologies; Inquiry-Based Teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÃO

Figura 3.1	Sequência de Ensino Investigativo	26
Figura 4.1	Amortecedor utilizado na construção de prédios e pontes para reduzir impactos de oscilações.	31
Figura 4.2	Amortecedores em veículos.	32
Figura 4.3	Oscilador massa-mola	33
Figura 4.4	Representação esquemática de um pêndulo simples	35
Figura 4.5	Comportamento ondulatório de oscilador amortecido	38
Figura 4.6	Comportamento ondulatório de oscilador forçado	41
Figura 4.7	Joseph Louis Lagrange (1736-1813)	48
Figura 4.8	Pêndulos simples acoplados por uma mola	49
Figura 4.9	Comportamento ondulatório do sistema de pêndulos simples acoplados	53
Figura 5.1	Condicionador de sinais	56
Figura 5.2	Conversão de sinais analógicos em digitais	57
Figura 5.3	Diagrama de bloco de um conversor A/D de Aproximação Sucessiva	57
Figura 5.4	Diagrama de bloco de um conversor A/D Delta-Sigma	58
Figura 5.5	Placa Arduino UNO	60
Figura 5.6	Esquematização do sistema de aquisição de dados	60
Figura 5.7	Encoder incremental óptico	62
Figura 5.8	Elementos constituintes do encoder	63
Figura 5.9	Resoluções de encoders	63
Figura 5.10	Estrutura do encoder óptico incremental	64
Figura 5.11	Ligação entre encoder e placa Arduino	65
Figura 5.12	Vista esquemática do circuito	66
Figura 6.1	Esquematização de dois pêndulos acoplados por uma mola	68
Figura 6.2	Diagrama da conexão entre encoder e Arduino	69
Figura 6.3	Desenho da estrutura física em AutoCAD	70
Figura 6.4	Teste do dispositivo	71
Figura 6.5	Interface da simulação em Python	72
Figura 6.6	Esquematização do aparato integrado ao computador	73
Figura 6.7	Teste do código Arduino	74
Figura 6.8	Diagrama de blocos em LabVIEW	75
Figura 6.9	Interface do Labview	77
Figura 7.1	Cidade de Imperatriz - MA	81
Figura 7.2	Centro de Ensino Governador Archer, Imeratriz - MA	82
Figura 7.3	Etapa 1: Apresentação, manipulação e proposição do problema	89
Figura 7.4	Etapa 2: Identificação e exploração das hipóteses	90
Figura 7.5	Etapa 3: Elaboração e execução dos planos de ação	91

Figura 7.6	Etapa 4: Análise dos resultados e revisão das hipóteses	91
Figura 7.7	Etapa 5: Discussão e conclusão	92
Figura 7.8	Hipótese formulada pelo grupo 1	93
Figura 7.9	Hipótese formulada pelo grupo 5	93
Figura 7.10	Hipótese formulada pelo grupo 6	94
Figura 7.11	Hipótese formulada pelo grupo 4	94
Figura 7.12	Hipótese formulada pelo grupo 2	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Sensores e Fenômenos Físicos Medidos	55
Tabela 5.2	58
Tabela 7.1	Sequência de aulas	80

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A/D	Analógico para Digital
ASCII	American Standard Code for Information Interchange
AVR	Automatic Voltage Regulator
CEGA	Centro de Ensino Governador Archer
DIP	Dual In-line Package
EEPROM	Electrically-Erasable Programmable Read-Only Memory
GND	Ground
IDE	Integrated Drive Electronics
LABMADE	Laboratório de Materiais para Aplicações em Dispositivos Eletrônico
LabVIEW	Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench
LED	Light Emitting Diodes
MHS	Movimento Harmônico Simples
MNPEF	Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física
RISC	Reduced Instruction Set Computer
RLC	Resistor, Indutor e Capacitor
RPM	Rotação por minuto
SEI	Sequência de Ensino Investigativo
STEAM	Cience, Technology, Engineering, Arts and Mathematics)
TCL	Aprendizagem Centrada em Tarefas
UFNT	Universidade Federal do Norte do Tocantins
USB	Universal Serial Bus
VCC	Voltage at the Common Collector
VISA	Virtual Instrument Software Architecture
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Letra grega alfa minúsculo
β	Letra grega beta minúsculo
ω	Letra grega ômega minúsculo
ϕ	Letra grega phi minúsculo
θ	Letra grega theta minúsculo
π	Letra grega pi minúsculo
Δ	Delta maiúsculo
$\sin x$	Função seno
$\cos x$	Função cosseno
\vec{x}	Vetor
i	Número imaginário unitário
e^x	Função exponencial de base número de Euler
\mathcal{L}	Função Lagrangiana
$x' = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$	Notação para primeira derivada
$x'' = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Notação para segunda derivada
\int_a^b	Integral definida de “a” até “b”
C	Linguagem de programação C
$C++$	Linguagem de programação C++

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	TRABALHOS CORRELATOS	21
3	METODOLOGIA DE ENSINO	24
3.1	Sequência de Ensino Investigativo (SEI) - Contribuições de Piaget e Vygotsky	24
3.2	Etapas da Sequência de Ensino Investigativo (SEI)	25
3.2.1	Introdução e Motivação	26
3.2.2	Investigação e Exploração	27
3.2.3	Síntese e Compartilhamento	27
3.2.4	Avaliação	28
4	FUNDAMENTOS FÍSICOS	29
4.1	Oscilações	29
4.1.1	Oscilações Harmônicas	30
4.1.1.1	<i>Exemplos e Aplicações</i>	31
4.1.2	Movimento Harmônico Simples	32
4.1.2.1	<i>Pêndulo Simples</i>	34
4.1.3	Oscilações Amortecidas e Oscilações Forçadas	37
4.1.3.1	<i>Oscilações Forçadas Amortecidas</i>	41
4.1.4	O Balanço de Energia	42
4.1.4.1	<i>O Balanço de Energia para o Oscilador Amortecido</i>	42
4.1.4.2	<i>O Balanço de Energia para o Oscilador Forçado Amortecido</i>	45
4.1.5	Oscilações Acopladas	46
4.2	A mecânica Lagrangiana	47
4.2.1	A Equação de Lagrange para dois pêndulos acoplados por uma mola de constante elástica k	49
5	AUTOMAÇÃO, INSTRUMENTAÇÃO E AQUISIÇÃO DE DADOS	54
5.1	Elementos fundamentais de um sistema de aquisição de dados	54
5.1.1	Sensores e transdutores	54
5.1.2	Condicionador de sinal	55
5.1.3	Conversor A/D	56
5.1.4	Microcontrolador	58
5.1.4.1	<i>A Plataforma de Prototipagem Eletrônica Arduíno</i>	59
5.1.5	Computador	60
5.2	Automação no controle dos sistemas oscilantes Acoplados	61
5.2.1	Funcionamento do encoder óptico incremental	61

5.2.2	Placa Arduíno UNO e microcontrolador	64
6	APARATO EXPERIMENTAL	67
6.1	Parte computacional	72
7	RESULTADOS	78
7.1	Aplicação do produto	78
7.2	Local de aplicação	81
7.2.1	Primeiro encontro - aulas 1 e 2	82
7.2.1.1	<i>Impressões e análises do primeiro encontro</i>	83
7.2.2	Segundo encontro - aulas 3 e 4	83
7.2.2.1	<i>Impressões e análises do segundo encontro</i>	84
7.2.3	Terceiro encontro - aulas 5 e 6	85
7.2.3.1	<i>Impressões e análises do terceiro encontro</i>	85
7.2.4	Quarto encontro - aulas 7 e 8	86
7.2.4.1	<i>Impressões e análises do quarto encontro</i>	86
7.2.5	Quinto encontro - aulas 9 e 10	87
7.2.5.1	<i>Impressões e análises do quinto encontro</i>	88
7.2.6	Sexto encontro - aulas 11 e 12	89
7.2.6.1	<i>Impressões e análises do sexto encontro</i>	92
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	96
	REFERÊNCIAS	97
	Artigo de periódicos	97
	Artigo de anais de conferência	98
	Dissertações de Mestrado	99
	Livro	100
	TCC	101
	Tese de doutorado	102
	Referências online	102
	APÊNDICES	103
	Apêndice A	104
	Apêndice B	125
	Apêndice C	130
	Apêndice D	136

1 INTRODUÇÃO

A Física, de maneira geral, está relacionada à manifestação do interesse em explicar ou compreender os fenômenos naturais. Sua atuação no estudo da matéria e energia, ou nas interações matéria-matéria e matéria-energia, é o que designa fundamentalmente a importância desta Ciência (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2013).

Do ponto de vista comum, a Ciência, como um todo, é muitas vezes descredibilizada pela não percepção de seu uso. O que se sabe, porém, é que as mais simples atividades cotidianas fundamentam e praticam os objetos de estudos científicos. A implementação deste conhecimento ao que se julga rotineiro configura um avanço social em aspectos relacionados à reflexão, à criticidade e à filosofia (CAMILLO; MATTOS, 2014).

O estudo científico é fundamental para o avanço do conhecimento em diversas áreas do saber. Ele permite que problemas e questões sejam investigados de forma sistemática e rigorosa, utilizando metodologias científicas específicas. Além disso, a pesquisa científica contribui para a formação de novos pesquisadores, que poderão colaborar com novas descobertas e inovações para a sociedade. Segundo Kellert (1993) a pesquisa científica é uma atividade humana fundamental, que ajuda a entender o mundo natural e a solucionar problemas complexos.

Segundo Mora et al. (2001), o conhecimento científico é um dos pilares da cultura moderna, permitindo grandes avanços em diferentes campos do saber e da prática humana. Sua importância é evidenciada ao permitir entender e explicar fenômenos naturais e sociais de forma mais precisa e objetiva. Dentre as muitas contribuições, o avanço do conhecimento científico tem desempenhado um papel fundamental no desenvolvimento de novas tecnologias e no progresso em diversas áreas, como saúde, energia, meio ambiente e comunicação. Além de impulsionar inovações, esse conhecimento possibilita a tomada de decisões mais informadas e conscientes em diferentes contextos da interação humana.

No contexto da sala de aula, uma das estratégias mais comuns utilizadas na inserção do conhecimento científico e na visualização ou comprovação dos fenômenos é o emprego das atividades experimentais. Sua eficiência pode ser explicada pelo fator visual ou pela alternativa do “aprender fazendo”. A praticidade que se estabelece durante a construção ou exposição experimental favorece a validação das hipóteses formuladas ao mesmo tempo que traduz o apanhado teórico trazido pelo interlocutor (SILVA, 2016).

A complexidade atribuída à Física pode estar relacionada justamente à necessidade de abstração exigida para a visualização de fenômenos. Quando se utiliza a instrumentação atribuída à atividade experimental, existe a possibilidade de que a experiência seja mais significativa. Segundo Tironi et al. (2013), a experimentação é uma das principais formas de aprendizagem no ensino de Física no Ensino Médio. Ela permite que os estudantes testem teorias e conceitos de forma prática, além de desenvolver habilidades importantes como a observação, análise de dados e a resolução de problemas.

A experimentação muitas vezes é tratada como a simples realização de experimentos para a validação de hipóteses. No entanto, existem distinções quanto a essa definição de acordo com os propósitos atribuídos a esse tipo de atividade. Uma classificação recorrente e que está relacionada com a finalidade da experimentação é a que divide essa prática em

experimentação científica e experimentação didática.

A experimentação científica é uma atividade desenvolvida pelos cientistas com o objetivo de investigar a natureza e o comportamento dos fenômenos naturais. Ela envolve a aplicação de métodos rigorosos e controlados, com o intuito de coletar dados empíricos e testar hipóteses e teorias. A experimentação científica é, portanto, uma atividade voltada para a produção de novos conhecimentos e para a validação ou refutação de hipóteses científicas. (FREITAS MADRUGA; KLUG, 2015).

Por outro lado, a experimentação didática é uma atividade desenvolvida pelos professores com o objetivo de ensinar conceitos científicos aos estudantes. Ela envolve a aplicação de atividades experimentais no contexto da sala de aula, com o intuito de facilitar a compreensão dos conteúdos teóricos e estimular o interesse do aluno pela ciência. A experimentação didática é, portanto, uma atividade voltada para a promoção da aprendizagem dos estudantes e para a aproximação dos conceitos científicos do cotidiano dos mesmos (MORTIMER; SCOTT, 2003).

Para Agostini e Trevisol (2014), apesar de terem objetivos distintos, a experimentação científica e a experimentação didática apresentam muitas similaridades em termos de metodologia e procedimentos. Ambas envolvem a definição de um problema, a formulação de hipóteses, o planejamento de experimentos, a coleta e análise de dados e a apresentação de resultados. Essas similaridades evidenciam a importância da experimentação para o desenvolvimento da ciência e para o ensino de ciências.

No ambiente de sala de aula, as práticas experimentais podem receber uma nova classificação quanto ao método empregado na realização do experimento. Nessa identificação, estas atividades podem ser divididas em: atividades experimentais demonstrativas, investigativas ou de verificação.

As atividades experimentais demonstrativas configuram as que o professor realiza o experimento e os alunos observam e analisam os resultados obtidos. Essas atividades podem ser utilizadas para apresentar conceitos científicos complexos de maneira mais clara e simples, permitindo que os alunos visualizem o que está sendo estudado. Segundo Chaves (2014), essas atividades são muito úteis para motivar os alunos e despertar a curiosidade científica.

Já as atividades experimentais investigativas são aquelas em que os alunos têm a oportunidade de explorar e investigar um fenômeno ou problema científico. Nesse tipo de atividade, o estudante é incentivado a formular hipóteses e a testá-las por meio de experimentos e observações. Essas atividades são importantes para que o estudante desenvolva habilidades de investigação e aprenda a trabalhar de forma independente (STRIEDER; WATANABE, 2018).

Por fim, a atividade experimental de verificação objetiva verificar ou confirmar uma teoria ou conceito previamente estudado em sala de aula. Nesse tipo de atividade, os alunos realizam experimentos para comprovar se as hipóteses formuladas previamente são válidas ou não. Segundo Araújo e Abib (2003), essas atividades são importantes para que os alunos aprendam a validar as hipóteses formuladas e a verificar se os resultados obtidos são consistentes com o conhecimento científico estabelecido.

Apesar das características e dos objetivos próprios de cada uma, as atividades experimentais, como um todo, são muito importantes para o ensino de Física e das demais Ciências. Mesmo diante destas evidências e apesar de defendida por diversos autores, a

experimentação ainda não é prática recorrente em boa parte das escolas públicas no Brasil. Quando acontecem, muitas vezes não se dá de forma adequada, seja pela falta de materiais, infraestrutura ou até mesmo pelo despreparo dos professores.

Em contrapartida, com os avanços tecnológicos e a evolução das ferramentas de experimentação, o ensino de Física pode ser enriquecido com atividades experimentais cada vez mais sofisticadas e precisas. A utilização de tecnologias como sensores, softwares de simulação e realidade virtual permite que os alunos explorem conceitos complexos de forma mais interativa e visual. A experimentação pode se tornar mais eficiente e acessível, possibilitando o desenvolvimento de habilidades práticas e científicas importantes.

Um exemplo de avanço tecnológico que tem impactado o ensino de Física é a utilização de softwares de simulação. Estes programas permitem que os alunos simulem situações que seriam difíceis ou impraticáveis de serem realizadas na vida real. Além disso, eles podem explorar conceitos teóricos em um ambiente mais interativo e visual. Um estudo realizado por [Jaime e Leonel \(2024\)](#) mostrou que a utilização de um software de simulação aumentou o interesse e a motivação dos alunos em relação ao ensino de Física.

Outra abordagem interessante é a utilização de sensores em atividades experimentais em Física. Sensores como termômetros, fotômetros e acelerômetros podem ser conectados a computadores para coletar e analisar dados em tempo real. Isso permite que os alunos obtenham resultados mais precisos e consistentes, além de possibilitar a realização de atividades experimentais mais complexas, promovendo, desta forma, motivação e interesse significativos nos alunos em relação ao ensino de Física ([SILVA; VEIT, 2006](#)).

Diante deste cenário, e em busca de promover cada vez mais o interesse do aluno pelo desenvolvimento do conhecimento científico, este trabalho busca investigar de que maneira uma SEI (Sequência de Ensino Investigativo) pode potencializar a aprendizagem do tema 'osciladores harmônicos acoplados' para alunos do Ensino Médio. Para tanto, adota um procedimento experimental que utiliza algumas dessas tecnologias disponíveis para a construção de um sistema experimental, composto por dois pêndulos acoplados por uma mola, integrado a um produto educacional. Este produto servirá como ferramenta para incentivar, motivar e apoiar o estudo da Física de sistemas mecânicos não lineares, como é o caso dos pêndulos acoplados. Além do aparato experimental, o produto contempla um manual detalhado que orienta passo a passo a construção e a calibração do sistema, além de apresentar uma descrição formal e abrangente do seu funcionamento. Esse manual também integra simulações computacionais desenvolvidas com foco tanto nos aspectos numéricos quanto na visualização gráfica, utilizando códigos em Python que permitem a reprodução, análise e interpretação dos fenômenos simulados.

O produto educacional é orientado a propósitos didáticos, objetivando seu emprego em laboratórios de ensino de Física como ferramenta de motivação e suporte às aulas teóricas. Ele será empregado, como incentivo à prática experimental, em aulas de Física, na disciplina Física Mecânica, de turmas do Ensino Médio. Todo o material didático e sua aplicação em sala de aula estão fundamentados no contexto da teoria de aprendizagem Sequência de Ensino Investigativo (SEI), discutida no capítulo 3 desta dissertação, respaldada pela sua praticidade e relevância.

A sequência deste trabalho está organizada da seguinte forma: a introdução contextualiza e discute a importância de trabalhos como este. Em seguida, apresenta-se o capítulo de fundamentação teórica, denominado "Trabalhos Correlatos". No capítulo 3, são discutidas a metodologia de ensino utilizada na aplicação do produto e a metodologia de

aplicação da sequência didática. O capítulo 4 aborda os fundamentos físicos que embasam esta pesquisa. Já o capítulo 5 trata do processo de automação e aquisição de dados em sistemas similares ao proposto. O capítulo 6 é dedicado ao aparato experimental, incluindo a indicação dos materiais utilizados e os processos de montagem. O capítulo 7 apresenta os resultados obtidos com a aplicação do aparato físico, finalizando no capítulo 8 com as considerações finais.

2 TRABALHOS CORRELATOS

Não diferente do que se tinha em tempos longínquos, onde a inserção tecnológica, vide a invenção da roda, representava um avanço imensurável em áreas diversas, sobretudo no ambiente educacional e na exploração científica, a inclusão de novas tecnologias ao cenário educacional atual configura a não obsolescência dos processos educacionais, mas a inovação e aprimoramento das técnicas de ensino. Em Física, onde a necessidade abstrativa é intrínseca ao entendimento, as ferramentas tecnológicas tornam-se agentes agregadores à compreensão aprofundada dos conceitos mais complexos. Dentre essas tecnologias, a plataforma de prototipagem Arduino e a linguagem de programação Python destacam-se pelas suas características interativas que permitem a simulação e a experimentação em contextos didáticos (COSTA, 2019).

A inclusão de tecnologias como Python e Arduino não só favorece a visualização de fenômenos abstratos como também proporciona maior envolvimento do público nas ações didáticas e, conseqüentemente, uma aprendizagem ativa. Arduino, com sua plataforma prática e de fácil manuseio, permite o desenvolvimento hands-on de dispositivos experimentais que favorecem a exemplificação e testagem dos conceitos teóricos. De forma semelhante, Python possui uma sintaxe simplificada, acessível e com uma biblioteca abrangente de recursos, permitindo a elaboração de simulações interativas e a análise eficiente de dados obtidos em experimentos físicos (MENDES, 2019).

As metodologias ativas indicam que estudantes diretamente envolvidos na construção e manipulação de modelos desenvolvem habilidades de forma mais significativa do que quando apenas recebem passivamente informações. Assim, fica evidente que a inserção de ferramentas que promovem esse dinamismo reflete não apenas na constatação de fenômenos abstratos, mas também na ampliação de um movimento muito mais abrangente: a difusão das metodologias ativas (BERBEL, 2011). Nessa perspectiva, este capítulo revisitará sinteticamente alguns trabalhos que fizeram uso de tecnologias como a plataforma Arduino e a linguagem de programação Python numa abordagem ativa de aprendizagem.

Martins, Cordeiro e Oliveira Loureiro (2019), no artigo intitulado “Um programa em Python para experimentos de física automatizados com o Arduino”, desenvolveram um programa em Python integrado à plataforma Arduino, com o intuito de reproduzir experimentos de Física de forma automatizada e interativa, onde os estudantes conseguiam manipular, modificar e interagir com a plataforma adicionando informações em campos pré-determinados, a fim de prever comportamentos e analisar resultados. A interação ocorria de forma que os estudantes não necessitavam de um conhecimento em programação e eletrônica. Na ocasião, o programa integrava três experimentos: pêndulo simples, carga e descarga de um capacitor e absorção de radiação eletromagnética, todos com resultados compatíveis com as conjecturas teóricas. Apesar de iniciar com três, a inserção de novos experimentos era possível com o passar do tempo.

Souza Freitas et al. (2022) montaram um anemômetro de concha com materiais de baixo custo associado a uma placa Arduino. O experimento contou com um sensor de efeito Hall (SEH) responsável por medir a rotação das conchas. No artigo de título “Anemômetro de baixo custo para o ensino de física: uso do Arduino e Python”, os autores relatam a experiência e discutem como esse trabalho impactou a motivação dos alunos

pela Ciência e a aproximação de teoria e prática.

Fetzner Filho (2015), na dissertação intitulada “Experimentos de baixo custo para o ensino de física em nível médio usando a placa Arduino-UNO”, reflete sobre os desafios enfrentados por professores de Física na educação básica. Partindo dessa realidade, propõe em seu trabalho o desenvolvimento de materiais instrucionais usando a placa Arduino-UNO para a abordagem dos assuntos relacionados à Cinemática. O autor se ampara na Teoria de Aprendizagem Significativa de David Ausubel para o desenvolvimento de tal material, que inclui, entre outras ferramentas, um equipamento constituído por sensores ópticos, infravermelhos e ultrassônicos e softwares desenvolvidos em Python para exibição em tempo real dos gráficos de posição, velocidade e aceleração em função do tempo.

Santos Cruz et al. (2022), no artigo intitulado “O uso do Python na construção de simuladores computacionais: proposições e potencialidades para o ensino de Física”, propõe a utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação no processo de ensino-aprendizagem em contexto pandêmico. Os autores analisam as potencialidades do uso de simuladores que utilizam a linguagem de programação Python e sua biblioteca gráfica vpython no ensino de Mecânica no Ensino Médio, discutem a lógica de construção desses simuladores e propõem exemplos de simulações em um laboratório virtual. Em suas considerações, é destacado a baixa produção acadêmica de trabalhos que incentivam a inclusão da programação em sala de aula, bem como o gargalo promovido pela falta de conhecimento em programação por parte dos professores, o que dificulta a efetivação de propostas que utilizam ferramentas como estas.

Pinto, Leão e S Jr (2023), no artigo intitulado “Posicionador de antenas automatizado de baixo custo para medições de diagramas de radiação”, desenvolveram, com materiais de baixo custo, um protótipo de um posicionador de antenas automatizado. Para isso, um código em Python foi utilizado na automatização, coleta e processamento de dados de potências recebidas. O experimento contou também com um microcontrolador Arduino Uno sincronizado ao código Python, que tinha por função controlar a rotação do posicionador. Para validar a efetividade do aparato, foi feito um paralelo entre os resultados obtidos da medição do diagrama de radiação de uma antena feita pelo protótipo e os obtidos no software de simulação eletromagnética ANSYS HFSS.

Melo et al. (2023), na dissertação intitulada “Instrumentação com Arduino para o ensino de Física – lançamento oblíquo”, destaca o baixo custo de aquisição do Arduino, bem como suas bibliotecas de código aberto, para justificar a possibilidade de equipagem de laboratórios rudimentares, mas com instrumentos suficientes para a exploração de diversos fenômenos físicos. Na ocasião, o autor enfatizou a instrumentação de um lançador de projéteis que conta como base teórica o lançamento oblíquo e o movimento de queda livre. As metodologias ativas Sala de Aula Invertida e Aprendizagem Baseada em Projetos foram utilizadas na aplicação em sala de aula. Melo destaca como essas abordagens metodológicas promovem o aprendizado cooperativo, horizontalizando, desta forma, a relação entre professor e aluno.

Na dissertação intitulada “A Utilização da plataforma Arduino no processo de aprendizagem da Física por meio da abordagem STEAM”, Daniel Gomes da Silva et al. (2021) fez uso da plataforma de prototipagem Arduino a fim de examinar a possibilidade de aprendizagem prática dos conteúdos de Termodinâmica em uma turma de Licenciatura em Física. A experiência foi mediada pela educação STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics) e teve como ambientação os problemas reais do

mundo moderno e as soluções teorizadas. A experiência ocorreu na modalidade de ensino remoto e esteve apoiada na Aprendizagem Centrada em Tarefas (TCL), guiada pelos objetos de aprendizagem da Taxonomia de Bloom.

Araujo et al. (2013), na monografia de título “Projeto controle: protótipo de telerobótica usando Python e Arduino”, desenvolveu um protótipo de veículo automotor de quatro rodas com o propósito de viabilizar soluções de problemas relacionados à dificuldade de explorar ambientes que ofereçam riscos à saúde humana. Uma placa microcontroladora Arduino associada à linguagem de programação Python foi utilizada no processo de construção do equipamento.

Dionisio et al. (2017), na dissertação de título “Atividade experimental para o estudo dos fundamentos do eletromagnetismo e da corrente elétrica alternada”, desenvolveu um aparato experimental onde é possível a observação do valor da corrente elétrica alternada em função do tempo em eletrodomésticos. O equipamento contou com um toroide como sensor de corrente, uma placa Arduino para a conversão em sinais digitais e programas de computador desenvolvidos em Python para processamento de dados e exibição de gráficos. A metodologia empregada na aplicação do trabalho esteve fundamentada nos três momentos pedagógicos de Delizoicov e Angotti, que ocorrem basicamente com a problematização inicial seguida da organização do conhecimento e finalizando com a aplicação das ideias desenvolvidas.

Apesar da ausência na literatura de trabalhos exatamente como este aqui desenvolvido, as similaridades com os citados ao longo deste capítulo mostram o crescente interesse por pesquisas que envolvem novas tecnologias disponíveis e a facilidade a elas atrelada.

3 METODOLOGIA DE ENSINO

O processo metodológico aplicado em situações nas quais se esperam resultados positivos é determinante para o êxito. Neste trabalho, utilizar-se-á a metodologia de sequências de ensino investigativo com demonstração experimental. Essa metodologia configura-se como uma abordagem pedagógica cujo objetivo é promover a aprendizagem ativa e o desenvolvimento de habilidades científicas nos estudantes, por meio da realização de investigações e experimentos práticos em sala de aula.

Essa sequência de ensino geralmente é dividida em três fases: a primeira é a fase exploratória, em que os estudantes são convidados a observar e descrever um fenômeno ou problema a ser investigado. Na segunda etapa, chamada de investigação propriamente dita, os estudantes são orientados a formular hipóteses, planejar e realizar experimentos para testar suas hipóteses. Na terceira etapa, a fase de comunicação, os estudantes são estimulados a compartilhar seus resultados com a classe, discutir suas descobertas e refletir sobre o processo investigativo (CARVALHO, A. M. P. de, 2018).

A demonstração, quando trabalhada de forma investigativa, ganha caráter representativo e ilustrativo de conceitos científicos de forma prática e visual. Através dela, o professor pode mostrar aos estudantes os efeitos e resultados esperados de um experimento, antes que eles o realizem de fato.

3.1 Sequência de Ensino Investigativo (SEI) - Contribuições de Piaget e Vygotsky

O desenvolvimento da metodologia denominada Sequência de Ensino Investigativo (SEI) reflete as influências e princípios básicos das teorias de Vygotsky e Piaget, duas personalidades importantes no campo da psicologia do desenvolvimento e da educação. A SEI é uma abordagem pedagógica que visa promover a aprendizagem ativa e o desenvolvimento cognitivo dos alunos, incorporando elementos dessas teorias de forma interativa (RODES; SILVA; GARCIA, 2019).

A teoria sociocultural de Vygotsky evidencia a importância do ambiente social e da interação no processo de aprendizagem. Vygotsky argumenta que a aprendizagem ocorre de maneira mais eficaz quando os alunos estão envolvidos em atividades colaborativas e interagem com colegas mais experientes ou com os professores. A SEI incorpora essa ideia ao promover atividades de investigação, muitas vezes realizadas em grupos, nos quais os alunos são incentivados a discutir ideias, compartilhar conhecimento e construir entendimento coletivo. Isso cria um ambiente propício para a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Vygotsky, onde os alunos podem alcançar níveis mais avançados de compreensão com o apoio de outros (VYGOTSKY, 1978).

Além disso, Vygotsky destaca a importância das ferramentas culturais e dos mediadores sociais na aprendizagem (VYGOTSKY, 1962). A SEI utiliza recursos como materiais didáticos, tecnologia e orientação do professor como ferramentas que auxiliam os alunos em suas investigações, facilitando a construção do conhecimento de maneira mais eficaz.

Por outro lado, as ideias de Jean Piaget sobre a construção ativa do conhecimento pelo aluno também têm impacto na SEI. Piaget enfatiza a importância da experiência direta e da resolução de problemas na aprendizagem. Nesse sentido, a SEI coloca os alunos no centro do processo de aprendizagem, envolvendo-os em investigações práticas e desafios que requerem a aplicação ativa do pensamento crítico e da resolução de problemas. Isso está alinhado com a ênfase de Piaget na aprendizagem como um processo construtivo em que os alunos desenvolvem conceitos e estruturas cognitivas por meio de suas próprias ações e interações com o ambiente (PIAGET, 1952).

Ainda nessa perspectiva, a SEI valoriza o erro como uma oportunidade de aprendizagem, o que se relaciona com a ideia de Piaget de que os conflitos cognitivos e as contradições são importantes impulsionadores do desenvolvimento intelectual (PIAGET; INHELDER, 1969). Os alunos são encorajados a explorar, experimentar e, muitas vezes, a cometer erros durante suas investigações, permitindo que eles construam seu conhecimento de maneira mais sólida.

3.2 Etapas da Sequência de Ensino Investigativo (SEI)

A Sequência de Ensino Investigativo vem ganhando notoriedade dentro do contexto das metodologias ativas graças ao seu potencial em promover a aprendizagem significativa. No Brasil, uma das principais referências é a professora Anna Maria Pessoa de Carvalho, cuja dedicação à adaptação para diversos contextos, à formação de professores e à pesquisa contribuiu para tornar a SEI uma metodologia eficaz e amplamente reconhecida na educação brasileira.

Segundo Anna Maria Pessoa de Carvalho (2022), tal metodologia trata-se de um procedimento pedagógico que tem como objetivo promover a aprendizagem ativa e o desenvolvimento de habilidades científicas nos alunos por meio da realização de experimentos práticos em sala de aula. A aplicação da Sequência de Ensino Investigativo, apesar das possíveis variações, pode ser dividida em três etapas: apresentação ou manipulação do material experimental e proposição do problema; identificação e exploração das hipóteses/previsões dos alunos; e elaboração de possíveis planos de ação e execução do planejado.

Figura 3.1 – Sequência de Ensino Investigativo



Fonte: Autoria própria

A Figura 3.1 mostra, de forma resumida, como normalmente a metodologia apresentada se estabelece. Apesar das claras definições de fases que essa metodologia abrange, e que são mostradas a seguir, a SEI possui variações, o que a torna um instrumento dinâmico e não delimitado em etapas restritas. É comum perceber essas variações quando se tem aplicações de problemas experimentais complexos ou sensíveis que não permitem a manipulação pelo próprio aluno. Nesse caso, por exemplo, o aluno inicia como observador e a SEI configura-se com caráter demonstrativo. Em outros casos, com experimentos cuja manipulação descarta a possibilidade de dano ao aluno, ele pode participar ativamente desde a construção até a realização do experimento.

3.2.1 Introdução e Motivação

Na etapa inicial, o objetivo é despertar o interesse dos alunos pelo tópico a ser estudado e motivá-los para a investigação científica. Isso é fundamental para criar um ambiente propício à aprendizagem e à curiosidade. Algumas das atividades típicas nesta fase incluem:

- ***Ativação do conhecimento prévio***

O mediador inicia com perguntas norteadoras a fim de perceber o que os alunos já sabem sobre o assunto em questão. Isso ajuda a identificar as ideias pré-concebidas dos alunos e a criar uma base para a construção do conhecimento.

- ***Apresentação do tópico***

O professor apresenta o tópico de estudo de maneira instigante e relevante para a vida dos alunos, mostrando sua importância e aplicações práticas. Nessa

etapa, é importante a adequação da linguagem, visto que, no primeiro momento, os termos técnicos não terão tanto significado para o aluno.

- ***Contextualização***

É importante contextualizar a prática dentro do currículo escolar e da vida cotidiana dos alunos, explicando como ele se relaciona com outros conceitos e temas. A aplicação de uma SEI, quando não é rotineira, pode gerar no aluno a ideia de singularidade, podendo este entender como uma atividade extra e sem relação com o restante do currículo ou com assuntos anteriores.

- ***Questionamento***

O professor estimula os alunos a fazerem perguntas sobre o tópico, promovendo a curiosidade e a investigação. Esse processo também serve como verificação do entendimento da proposta. Ao questionar, o aluno demonstra o nível de clareza quanto à situação. O mediador atento consegue discernir quando sua explicação não foi tão eficaz a partir das questões colocadas pelos estudantes.

3.2.2 **Investigação e Exploração**

Nesta segunda etapa, os alunos são envolvidos em atividades práticas de investigação, onde exploram, coletam dados, manipulam experimentos e investigam a proposta trabalhada na SEI em profundidade. Podemos destacar como características desta fase:

- ***Atividades práticas***

Os estudantes participam de atividades práticas que envolvem a coleta de dados, experimentação e/ou observação. Eles podem trabalhar individualmente ou em grupos, dependendo da natureza do projeto. Apesar das interações defendidas por Vygotsky, a aplicação da SEI não está restrita à ocorrência em equipes.

- ***Mediação do professor***

O professor atua como um mediador durante boa parte do processo, no entanto, nessa etapa, ele age de maneira a orientar, esclarecer dúvidas e fornecer recursos e suporte quando necessário, mas sem interferir na organização das ideias dos indivíduos, permitindo assim que os alunos conduzam suas próprias investigações..

- ***Registro de dados***

Ainda nessa etapa da SEI, os alunos registram e analisam os dados coletados, fazem anotações e formulam hipóteses à medida que avançam em suas investigações. A colaboração entre eles é incentivada, promovendo discussões e compartilhamento de ideias.

3.2.3 **Síntese e Compartilhamento**

Na terceira etapa, os alunos consolidam suas descobertas e compartilham-nas com a turma. Isso proporciona reflexão, diálogo e aplicação do conhecimento adquirido. Algumas atividades que configuram essa etapa incluem:

- ***Apresentação dos Resultados***

Os estudantes socializam suas descobertas e elucidações para a turma através de relatórios, apresentações orais, experimentos ou outras formas de comunicação.

- ***Discussão e Reflexão***

Os estudantes discutem os resultados obtidos pela equipe expositora, observam e analisam as implicações do exposto com os conceitos estabelecidos anteriormente ou com suas próprias descobertas.

- ***Aplicação do Conhecimento***

O mediador incentiva os estudantes a aplicar o conhecimento construído em situações mais abrangentes ou diferentes das trabalhadas inicialmente. A proposta deve encorajá-los em investigações mais complexas ou relacionadas com o mundo real.

3.2.4 Avaliação

A avaliação deve ser considerada uma etapa à parte. Em uma SEI, esta funciona como um artifício crítico que determina a eficácia e impacto da metodologia no desenvolvimento cognitivo do aluno. Por ser uma abordagem pedagógica inovadora, centrada na investigação e na construção ativa do conhecimento, requer um processo de avaliação cuidadosamente planejado para mensurar seus resultados e identificar áreas de melhoria. Tal avaliação se configura com caráter formativo, visto que deve abranger diversas dimensões, incluindo o desenvolvimento de habilidades cognitivas e científicas dos alunos, o engajamento dos estudantes, a eficácia das atividades de investigação e o papel do professor como mediador do aprendizado.

O sucesso da aplicação de uma Sequência de Ensino Investigativo está condicionado à boa recepção por parte dos estudantes de todas as etapas que se propõe. Associado a isso, considera-se que o desenvolvimento cognitivo adquirido com as atividades práticas de investigação deve acarretar no pensamento crítico, resolução de problemas complexos, formulação de hipóteses e análise de dados. Portanto, a avaliação deve incluir a análise do progresso dessas habilidades ao longo do tempo e se os alunos estão obtendo a capacidade de aplicá-las em contextos diversos.

Outro aspecto que deve-se considerar na avaliação da SEI é o engajamento dos alunos no processo de aprendizagem. A metodologia busca promover a curiosidade e o entusiasmo pela investigação científica. Portanto, a avaliação desvencilha-se do caráter somativo e busca analisar se os estudantes estão motivados, participando ativamente das atividades e demonstrando interesse pelo tópico em estudo.

Finalmente, a avaliação da SEI deve considerar ainda o papel do professor como mediador do aprendizado. Isso envolve a análise da capacidade do professor em orientar os alunos, apoiá-los em suas investigações e facilitar discussões significativas. A metodologia depende da presença de um profissional que saiba quando intervir e encorajar que os alunos assumam a liderança de suas próprias aprendizagens.

4 FUNDAMENTOS FÍSICOS

Na fundamentação dos sistemas dinâmicos, a Física, como ciência que estuda os fenômenos naturais, baseia-se em conceitos elementares como movimento, força e energia. Esses fundamentos são essenciais para compreender as interações e os comportamentos de sistemas oscilatórios acoplados, presentes em diversos contextos que serão explorados adiante.

Oscilações acopladas podem ser definidas como sistemas compostos por dois ou mais osciladores individuais que, ao interagirem, influenciam reciprocamente seus movimentos. Apesar da ampla variedade de sistemas em que esse comportamento oscilatório, linear ou não linear, pode ser observado, o estudo detalhado do acoplamento entre osciladores ainda não é amplamente difundido. Segundo [Strogatz \(2018\)](#), os estudos sobre o comportamento de sistemas acoplados são fundamentais para compreender fenômenos coletivos observados em diversos contextos, como a sincronização espontânea em colônias de vagalumes, os osciladores Josephson na Física do estado sólido e, até mesmo, as dinâmicas em redes neurais.

No campo da mecânica, oscilações acopladas surgem em estruturas como pontes, edifícios e sistemas mecânicos industriais, onde a análise das frequências normais e modos normais de vibração é crucial para evitar ressonâncias catastróficas. Um exemplo clássico é o colapso da ponte Tacoma Narrows, cuja falha foi atribuída à interação de oscilações acopladas com forças externas do vento ([GAZZOLA; JLELI; SAMET, 2023](#)).

Outros contextos ilustram a importância do estudo das oscilações acopladas, como a formação de ondas estacionárias em instrumentos musicais, por exemplo, em cordas ou tubos de órgãos, e na propagação de ondas em redes atômicas de sólidos, fenômeno que dá origem aos fônons ([ASHCROFT; MERMIN, 1976](#)). Esses conceitos têm implicações diretas no desenvolvimento de tecnologias avançadas, como materiais nanoestruturados e dispositivos baseados em Mecânica Quântica.

Este capítulo tem como objetivo apresentar os princípios físicos que embasam o estudo das oscilações acopladas, fundamentais para a análise do sistema experimental desenvolvido neste trabalho, composto por dois pêndulos simples acoplados por uma mola de constante elástica baixa.

4.1 Oscilações

Oscilações são fenômenos físicos que ocorrem em sistemas capazes de variar periodicamente em torno de uma posição de equilíbrio devido à existência de graus de liberdade que possibilitam essa variação. Esse tipo de movimento pode ser observado em diversos contextos, desde sistemas mecânicos como pêndulos e molas até sistemas elétricos como circuitos *RLC*. As oscilações são caracterizadas por possuírem uma frequência natural de oscilação, que depende das propriedades do sistema em questão, e uma amplitude, que representa a magnitude do deslocamento máximo do sistema em relação à posição de equilíbrio. A compreensão das oscilações é essencial em diversas áreas da Física, incluindo a Mecânica Clássica, a Eletricidade e Magnetismo, a Física Quântica e a Física de Partículas

(HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2013).

4.1.1 Oscilações Harmônicas

Oscilações harmônicas são um tipo específico de oscilação e são caracterizadas pela realização de movimento periódico que ocorre em sistemas que são capazes de variar em torno de uma posição de equilíbrio de maneira proporcional ao deslocamento em relação a essa posição. Esse tipo de oscilação é comum em diversos sistemas físicos, como molas e pêndulos, e é caracterizado por possuir uma frequência natural de oscilação única e constante, que depende das propriedades do sistema em questão. Além disso, as oscilações harmônicas também possuem um período de oscilação constante, que é independente da amplitude do movimento (WALKER et al., 2016).

Para descrever matematicamente essas oscilações, utiliza-se a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0, \quad (4.1)$$

onde x representa a posição do objeto em relação ao ponto de equilíbrio e ω é a frequência angular da oscilação harmônica, determinada pelas propriedades do sistema em questão.

As oscilações harmônicas também são estudadas em sistemas elétricos e magnéticos. Por exemplo, em um circuito RLC , a dinâmica da carga elétrica é governada por uma equação diferencial que pode ser reduzida à equação de oscilação harmônica. Da mesma forma, em um sistema magnético, a oscilação harmônica pode ser observada no comportamento de partículas carregadas que se movem em um campo magnético oscilante. O estudo das oscilações harmônicas em sistemas elétricos e magnéticos é fundamental para o desenvolvimento de tecnologias como os circuitos eletrônicos e os aceleradores de partículas (WALKER et al., 2016).

Considerando os circuitos RLC , tem-se que a equação diferencial que descreve a variação da carga elétrica no capacitor é dada por:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V(t), \quad (4.2)$$

onde q é a carga elétrica no capacitor, L é a indutância do circuito, R é a resistência, C é a capacitância e $V(t)$ é a diferença de potencial aplicada ao circuito, enquanto t representa o tempo.

Para reduzir a equação acima à equação de oscilação harmônica não forçada, é necessário considerar o caso em que não há fonte de tensão externa, ou seja, $V(t) = 0$. Assim, a equação assume a forma:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (4.3)$$

Essa equação diferencial descreve um sistema oscilatório amortecido, análogo ao movimento harmônico amortecido em sistemas mecânicos. Pode-se identificar que essa equação possui a mesma estrutura da equação de oscilação harmônica padrão, com a

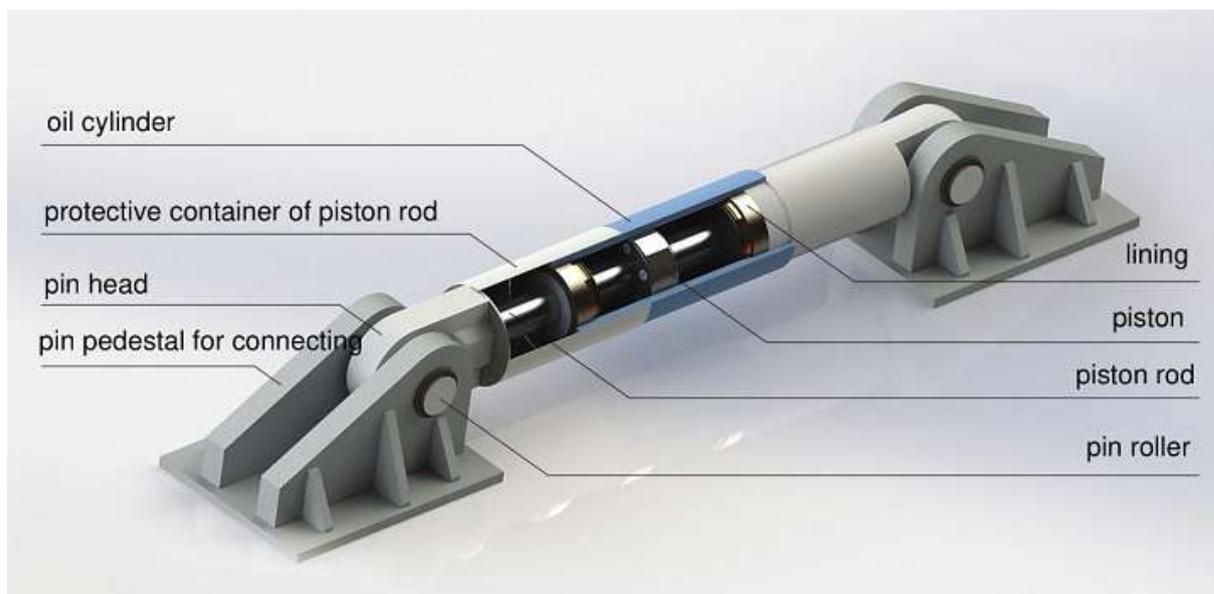
adição do termo de amortecimento proporcional à derivada temporal da carga, $\frac{R}{L} \frac{dq}{dt}$, que representa a dissipação de energia no circuito devido à resistência.

Além desses exemplos, as oscilações harmônicas são importantes em áreas como a biologia e a economia. Na biologia, estas são observadas em sistemas como o coração humano, que possui um ritmo de batimentos cardíacos que é regulado por um conjunto de osciladores biológicos. Na economia, elas são estudadas em modelos matemáticos que buscam explicar e prever flutuações nos mercados financeiros. O estudo das oscilações harmônicas em áreas não físicas é importante para a compreensão de diversos fenômenos complexos que envolvem sistemas dinâmicos e variáveis (SCOTT, 1994).

4.1.1.1 Exemplos e Aplicações

Além dos contextos já discutidos, é possível identificar as oscilações harmônicas e suas diversas aplicações práticas em sistemas físicos variados. Na engenharia mecânica, essas oscilações desempenham um papel crucial, especialmente no controle de vibrações e movimentos de diversos dispositivos. Um exemplo típico disso são os amortecedores de vibração em edifícios e pontes, projetados para atenuar a amplitude das oscilações geradas por fenômenos como ventos fortes ou terremotos, evitando danos estruturais. A figura 4.1 mostra um amortecedor fluido-viscoso, um tipo comumente utilizado na indústria civil. De forma similar, em veículos automotivos (Figura 4.2), sistemas de suspensão e amortecedores são empregados para minimizar as oscilações do chassi, proporcionando uma condução mais suave e aumentando a segurança. (SEARS et al., 2014).

Figura 4.1 – Amortecedor utilizado na construção de prédios e pontes para reduzir impactos de oscilações.



Fonte: Earthquake Dampers

Figura 4.2 – Amortecedores em veículos.



Fonte: Antena Livre

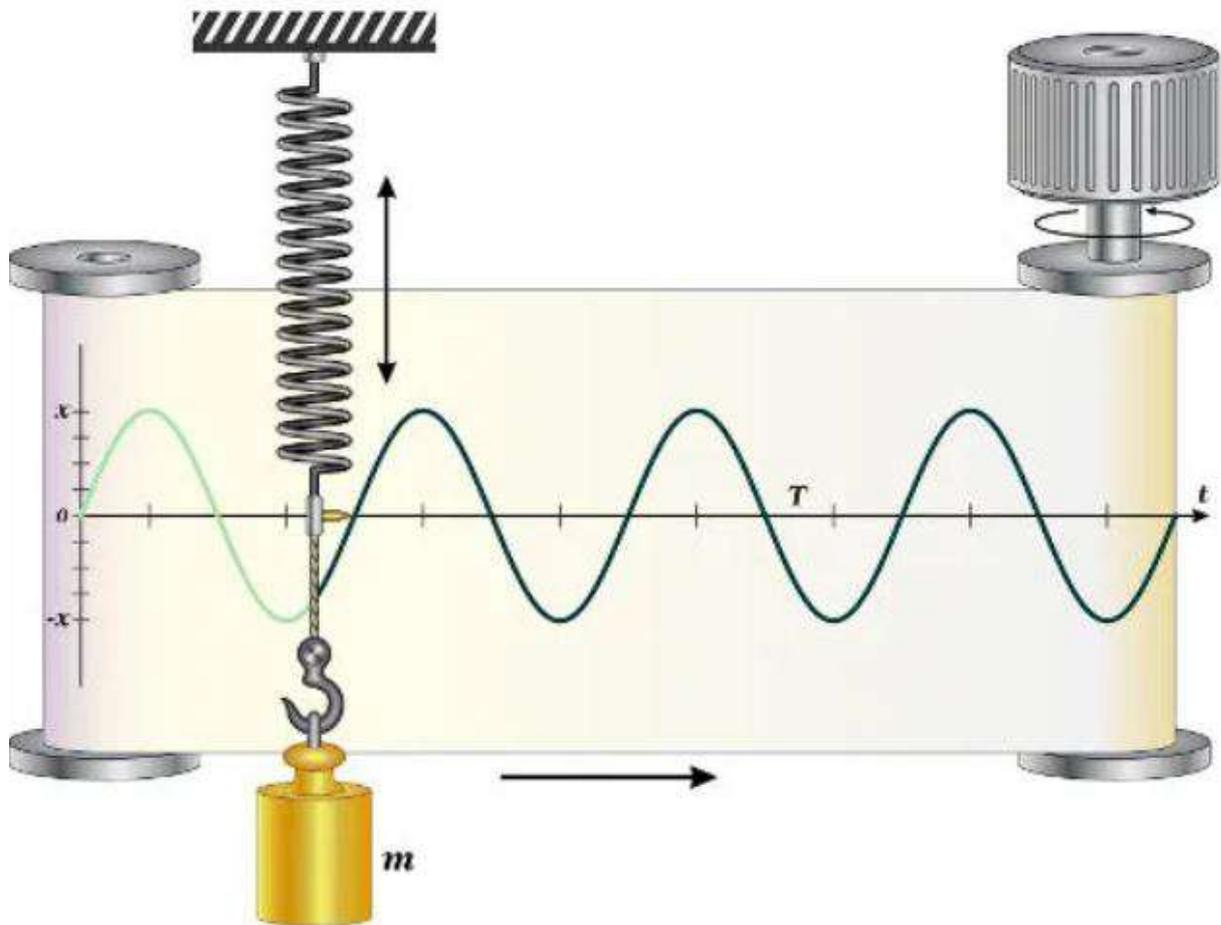
Excetuando aplicações em engenharia mecânica, as oscilações harmônicas são encontradas em muitos outros sistemas físicos. Na física da matéria condensada, por exemplo, a teoria de oscilações harmônicas é usada para descrever as vibrações das moléculas em um sólido ou líquido. Em eletrônica, elas são usadas para gerar sinais de rádio e micro-ondas em circuitos osciladores (KITTEL; KROEMER, 1971).

Na física teórica, as oscilações harmônicas são utilizadas como uma ferramenta para modelar a dinâmica de sistemas complexos, como o comportamento de partículas subatômicas em um campo quântico. Já na matemática, a teoria das oscilações harmônicas é usada para resolver equações diferenciais parciais, que são fundamentais para muitos campos da física teórica (GROSS; WILCZEK, 1973).

4.1.2 Movimento Harmônico Simples

O movimento harmônico simples (MHS) é um tipo de movimento periódico que ocorre quando a força restauradora que atua sobre um objeto é proporcional à sua posição em relação a uma posição de equilíbrio e tem direção oposta ao deslocamento. Esse movimento é caracterizado por uma oscilação em torno de um ponto central de equilíbrio, em que a velocidade e a aceleração do objeto variam periodicamente e são descritas por funções senoidais. A imagem 4.3 mostra um dos exemplos mais comuns onde é possível visualizar a ocorrência desse tipo de movimento, o sistema massa-mola (WALKER et al., 2016).

Figura 4.3 – Oscilador massa-mola



Fonte: Brasil Escola

A descrição matemática do MHS pode ser feita através de uma equação diferencial que relaciona a posição, velocidade e aceleração do objeto em relação ao tempo. Essa equação é geralmente escrita na forma de uma equação diferencial de segunda ordem, que é solucionada para obter as funções de posição, velocidade e aceleração dependentes do tempo. A solução dessas equações é usualmente uma função senoidal ou cossenoidal.

Enfatizando o parágrafo acima, parte-se da equação diferencial de segunda ordem que descreve o movimento harmônico

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (4.4)$$

onde x é a posição da partícula, t é o tempo e ω é a frequência angular do movimento. Esta equação possui uma solução geral dada por

$$x(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi) + A_2 \cos(\omega t + \phi), \quad (4.5)$$

sendo A_1 e A_2 as amplitudes das componentes do movimento nas direções do seno e cosseno, respectivamente, e ϕ , a fase inicial. A velocidade v da partícula é obtida derivando a função posição em relação ao tempo de forma que

$$v(t) = \omega A_1 \cos(\omega t + \phi) - \omega A_2 \sin(\omega t + \phi). \quad (4.6)$$

Colocando ω em evidência, pode-se descrever a velocidade como:

$$v(t) = \omega(A_1 \cos(\omega t + \phi) - A_2 \sin(\omega t + \phi)). \quad (4.7)$$

Por fim, o módulo da aceleração (a) da partícula é dado pela derivada segunda da posição em relação ao tempo:

$$a(t) = -\omega^2 A_1 \sin(\omega t + \phi) - \omega^2 A_2 \cos(\omega t + \phi). \quad (4.8)$$

Ou, de forma semelhante ao que foi feito com a velocidade, colocando $-\omega^2$ em evidência, tem-se que

$$a(t) = -\omega^2(A_1 \sin(\omega t + \phi) - A_2 \cos(\omega t + \phi)). \quad (4.9)$$

Uma das principais características do MHS é sua frequência, que é o número de oscilações completas que ocorrem em um segundo e é medida em Hertz (Hz). No sistema massa-mola, por exemplo, a frequência f é diretamente proporcional à raiz quadrada da constante elástica da mola k e inversamente proporcional à raiz quadrada da massa m do objeto. Portanto, sistemas com constantes elásticas maiores ou massas menores têm frequências mais altas

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.10)$$

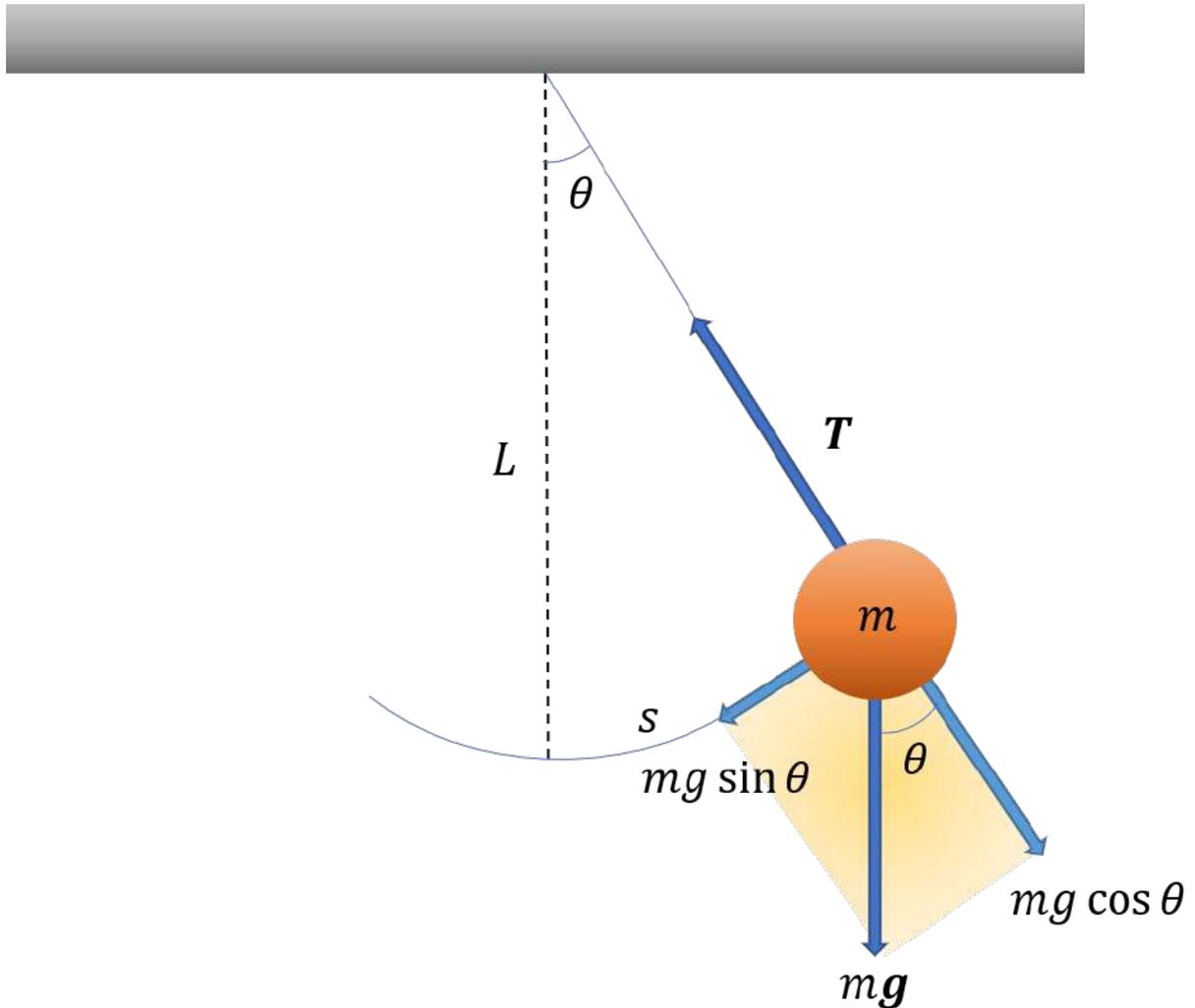
Outra importante propriedade do movimento harmônico simples é que a energia total do sistema permanece constante. A energia cinética e a energia potencial oscilam ao longo do movimento, mas a soma das duas é sempre constante. Isso é conhecido como o princípio da conservação da energia

$$E_{mec} = E_c + E_p. \quad (4.11)$$

4.1.2.1 *Pêndulo Simples*

Um dos sistemas mais característicos do movimento harmônico simples é o pêndulo simples. Ele é constituído por um sistema físico composto por uma massa presa a um fio inextensível e de massa desprezível, que oscila livremente em torno de um ponto fixo, com uma frequência constante e amplitude fixa. Por ser um exemplo clássico de movimento periódico, pode ser utilizado para estudar diversos fenômenos, como a gravidade e a conservação de energia. O movimento do pêndulo simples é influenciado pela força gravitacional, que atua sobre a massa e direciona-a para baixo, e pela tensão do fio, que age como uma força restauradora e empurra a massa de volta para a posição de equilíbrio (GOLDSTEIN; POOLE JR; SAFKO SR, 2012).

Figura 4.4 – Representação esquemática de um pêndulo simples



Fonte: Autoria própria

A equação diferencial que descreve o movimento do pêndulo simples pode ser deduzida a partir da análise das forças atuantes durante o movimento. A segunda lei de Newton relaciona a força que age sobre um objeto à sua aceleração. A equação é dada por:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}, \quad (4.12)$$

onde \vec{F}_R é a força resultante, m é a massa do objeto e \vec{a} é sua aceleração.

Para o pêndulo simples, a força que age sobre a massa é a força peso, que é dada por:

$$\vec{P} = m\vec{g}, \quad (4.13)$$

onde \vec{P} é a força peso, \vec{g} é a aceleração devido à gravidade e m é a massa do pêndulo.

A força peso atua na direção vertical, mas o movimento do pêndulo é ao longo de um arco s . Portanto, pode-se decompor a força peso nas componentes tangencial e radial (figura 4.4). A componente tangencial é a força que causa o movimento do pêndulo,

enquanto a componente radial é equilibrada pela tensão no fio. Assim sendo, a intensidade da força resultante atuante sobre o sistema pode ser definida por:

$$F_R = -mg \sin \theta, \quad (4.14)$$

sendo θ o ângulo que a haste forma com a vertical e o sinal negativo indica a ação da força restauradora.

Substituindo a equação (4.12) na equação (4.14), têm-se:

$$m\vec{a} = -m\vec{g} \sin \theta, \quad (4.15)$$

Como a componente radial da força peso equilibrou-se com a tensão do fio, apenas a aceleração tangencial continua agindo no sistema. O módulo dessa aceleração pode ser descrito pela segunda derivada do arco s formado pela trajetória entre a massa e o ponto de equilíbrio em relação ao tempo, de forma que:

$$\vec{a}_t = \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{t}. \quad (4.16)$$

Substituindo a equação (4.16) em (4.15):

$$m \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = -m\vec{g} \sin \theta. \quad (4.17)$$

O arco s é dado por:

$$s = L\theta, \quad (4.18)$$

onde L é o comprimento do fio.

Substituindo a equação (4.18) na equação (4.17), e dividindo ambos os termos por m tem-se que:

$$L \frac{d^2 \vec{\theta}}{dt^2} = -\vec{g} \sin \theta. \quad (4.19)$$

Essa é a equação de movimento geral do pêndulo simples, θ é a posição angular da massa, g é a aceleração da gravidade e L é o comprimento do fio.

Existem duas classes de soluções para a equação do pêndulo simples: o movimento periódico simples e o movimento não linear. Para pequenas amplitudes, a solução é aproximadamente uma função senoidal, ou seja, o movimento é periódico. Nesse caso, a equação do pêndulo simples se reduz à equação do oscilador harmônico simples. Já para amplitudes maiores, o movimento não é mais periódico e torna-se não linear. Neste caso, usam-se métodos numéricos ou aproximações analíticas mais complexas para obter soluções aproximadas.

Uma das características mais importantes do pêndulo simples é o período, que é o tempo que a massa leva para realizar uma oscilação completa. O período, quando se considera a aproximação de ângulos pequenos, é dado pela seguinte equação:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (4.20)$$

Essa equação mostra que o período, para esses casos, depende apenas do comprimento do fio e da aceleração da gravidade, e não da amplitude da oscilação. Em outras palavras, a equação mostra que o período do pêndulo é diretamente proporcional à raiz quadrada do comprimento do fio e inversamente proporcional à raiz quadrada da aceleração da gravidade. Importante enfatizar que essa equação é válida para pequenas oscilações, ou seja, quando o ângulo de deslocamento do pêndulo é pequeno o suficiente para que a aproximação do ângulo pequeno seja válida. Para ângulos maiores, a equação do período é mais complexa e pode não ter uma solução analítica simples.

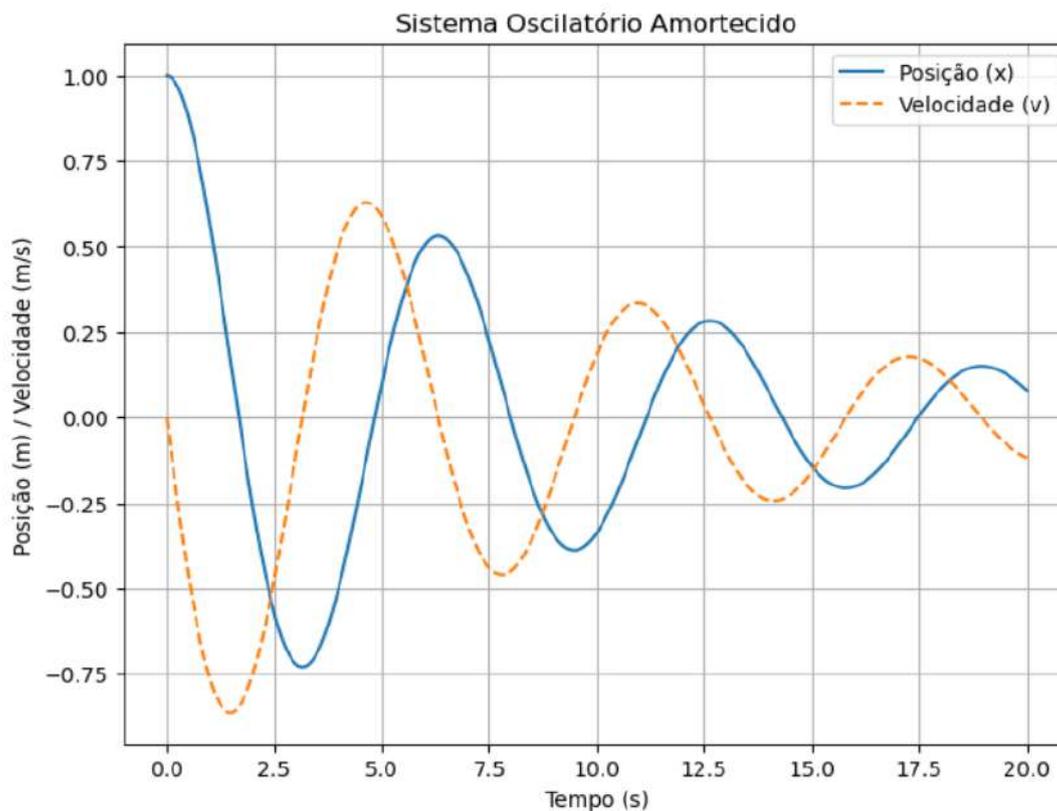
Outra característica importante do pêndulo simples é a energia do sistema. Durante o movimento, a energia potencial gravitacional é convertida em energia cinética e vice-versa. Para pequenas amplitudes, a energia total do sistema é constante, o que significa que a energia potencial e a energia cinética oscilam em fase e o movimento é conservativo. Já para amplitudes maiores, a energia total do sistema não é mais constante e o movimento torna-se dissipativo.

4.1.3 Oscilações Amortecidas e Oscilações Forçadas

Oscilações amortecidas e oscilações forçadas são dois tipos comuns de movimento harmônico que ocorrem na natureza. Embora ambos os tipos de oscilação envolvam uma massa se movendo em torno de um ponto de equilíbrio, suas características e comportamentos são diferentes (TIPLER; MOSCA, 2009).

As oscilações amortecidas ocorrem quando uma força de amortecimento atua sobre o sistema, dissipando a energia e fazendo com que a amplitude do movimento diminua com o tempo. Esse tipo de oscilação é comum em sistemas físicos que possuem resistência do ar, fricção ou outro tipo de força de atrito. À medida que a energia é dissipada, a amplitude do movimento diminui e a frequência do movimento permanece constante como mostra a figura 4.5. Um exemplo de oscilação amortecida é o movimento de um pêndulo simples que é submerso em um fluido viscoso. Com o tempo, o movimento do pêndulo diminui até que atinja seu estado de equilíbrio (GOLDSTEIN; POOLE JR; SAFKO SR, 2012).

Figura 4.5 – Comportamento ondulatório de oscilador amortecido



Fonte: Autoria própria

Um exemplo particular de oscilador amortecido ocorre quando este está submetido à uma força dissipativa linear, como por exemplo a força linear de arrasto acrescida de um termo dissipativo também linear. Sua intensidade é dada por:

$$F = -kx - b\frac{dx}{dt}. \quad (4.21)$$

A opção desta força acrescida do termo $-b\frac{dx}{dt}$ se faz importante para que a equação resultante seja uma equação linear a fim de não gerar comportamentos caóticos.

Pelo princípio fundamental da dinâmica, têm-se que

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}. \quad (4.22)$$

Substituindo a equação (4.22) na equação (4.21)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}. \quad (4.23)$$

Dividindo ambos os termos por m e reorganizando a equação, resulta que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} = 0. \quad (4.24)$$

Por definição, sabe-se que $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ e para esta situação, convém-se assumir que $\frac{b}{m} = 2\beta$. Fazendo as devidas substituições, nota-se que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x + 2\beta\frac{dx}{dt} = 0. \quad (4.25)$$

Esta é a equação do oscilador amortecido com amortecimento linear, onde ω_0 é a frequência do oscilador sem amortecimento.

Uma função que resolve esta equação necessita que a mesma, sua primeira derivada e sua segunda derivada formem uma combinação linear identicamente nula. A única forma disso acontecer é se a função e suas derivadas forem proporcionais entre si. Sabendo disso, uma possível solução é dada pela função

$$x(t) = e^{rt}, \quad (4.26)$$

onde r tem dimensão do inverso de t . Tendo sua derivada primeira igual a

$$\frac{dx}{dt} = re^{rt}. \quad (4.27)$$

E sua derivada segunda

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r^2e^{rt}. \quad (4.28)$$

Destas relações, pode-se escrever a equação (4.25) da seguinte forma:

$$r^2e^{rt} + \omega_0^2e^{rt} + 2\beta re^{rt} = 0. \quad (4.29)$$

Dividindo ambos os termos por e^{rt} , têm-se a seguinte equação de segundo grau

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0. \quad (4.30)$$

A expectativa é que a solução represente um movimento oscilatório decrescente, visto que este está sob a ação de uma força dissipativa.

Aplicando Bhaskara para solucionar a equação de segundo grau, tem-se:

$$r = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2}. \quad (4.31)$$

Fazendo as simplificações possíveis:

$$r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (4.32)$$

A solução geral, como toda equação de segundo grau, traz duas raízes que aqui serão representadas por r_+ e r_- . As duas soluções são linearmente independentes, então a solução geral pode ser escrita como:

$$x(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t}. \quad (4.33)$$

De forma explícita, toma-se:

$$x(t) = Ae^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + Be^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}. \quad (4.34)$$

Ou ainda

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(Ae^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} \right). \quad (4.35)$$

onde $e^{-\beta t}$ é uma exponencial decrescente e representa o termo de amortecimento, indicando o decaimento das oscilações.

Uma situação importante a considerar é o caso de $\beta < \omega$. Para essa situação, a solução é representada pela combinação linear de exponenciais imaginárias, de forma que

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(Ae^{i\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} + Be^{-i\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} \right). \quad (4.36)$$

Assumindo que $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \omega_1$, têm-se que:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t} \right). \quad (4.37)$$

Desta definição, percebe-se que $\omega_1 < \omega_0$, o que representa uma diminuição na frequência com que o oscilador oscila, como já era esperado.

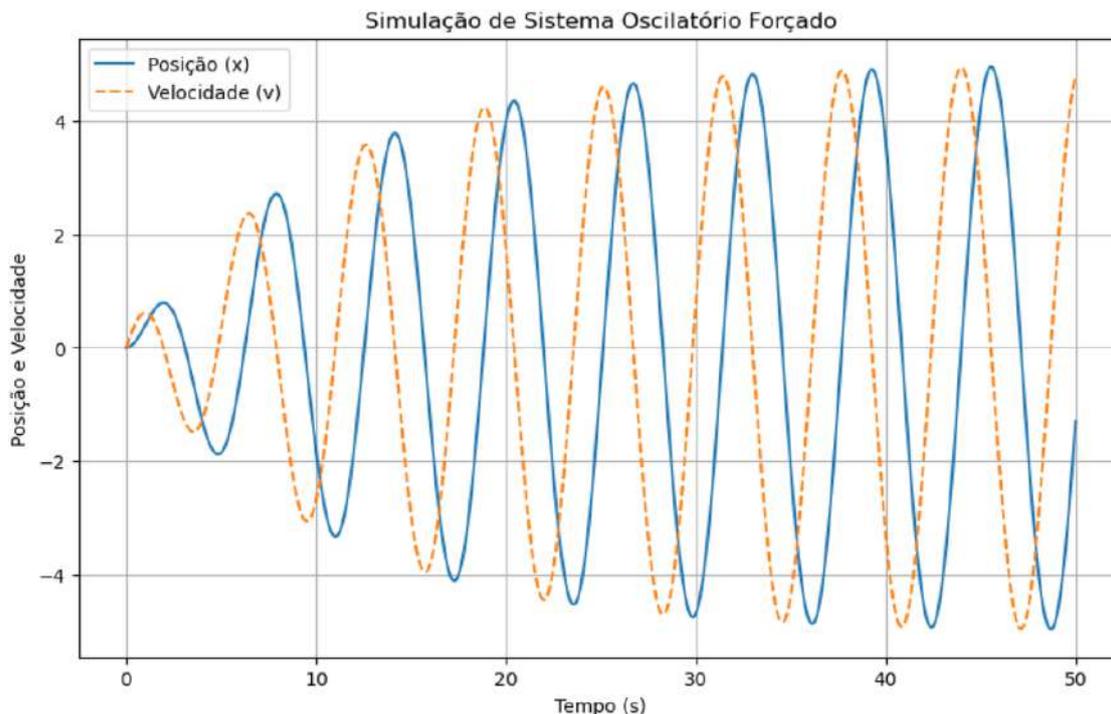
Da solução, nota-se ainda que, sem o termo de amortecimento, a mesma seria representada apenas por

$$x(t) = \left(Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t} \right). \quad (4.38)$$

Trata-se, na verdade, de uma forma de expressar a solução para o oscilador harmônico não amortecido, com a diferença de ω_1 seria ω_0 , a frequência de oscilação original.

Por outro lado, as oscilações forçadas ocorrem quando um sistema em movimento periódico é submetido a uma força externa que o mantém em movimento. Nesse caso, a força externa pode ser periódica ou não, e a amplitude e a frequência da oscilação dependem da frequência e da amplitude da força externa. Na figura 4.6 é possível visualizar um exemplo do padrão ondulatório de um oscilador forçado. O comportamento de um sistema em oscilação forçada pode ser complexo, e a resposta do mesmo à força externa pode ser afetada pela frequência de ressonância, que é a frequência natural do sistema ([HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2013](#)).

Figura 4.6 – Comportamento ondulatório de oscilador forçado



Fonte: Autoria própria

Um exemplo de oscilações amortecidas é o movimento de um pêndulo em um meio com resistência ao ar. À medida que o pêndulo oscila, a resistência do ar diminui gradualmente a amplitude do movimento até que o pêndulo pare de oscilar. Já um exemplo de oscilações forçadas é uma ponte suspensa que oscila devido ao vento. Nesse caso, a força do vento atua como uma força externa, mantendo a ponte em movimento. Se a frequência do vento coincidir com a frequência natural da ponte, a amplitude da oscilação pode aumentar drasticamente, levando a danos ou colapso da estrutura (SERWAY; JEWETT JR, 2018).

4.1.3.1 *Oscilações Forçadas Amortecidas*

Segundo Nussenzveig (2018), oscilações forçadas amortecidas são um tipo de particular de movimento harmônico que ocorre quando um sistema é submetido a uma força externa periódica e a uma força de amortecimento, que diminui a amplitude do movimento com o tempo.

Ao contrário das oscilações forçadas não amortecidas, a resposta do sistema a uma força externa depende da frequência da força aplicada. Isso significa que a amplitude e a fase da oscilação podem mudar com a frequência da força externa.

Um exemplo comum de oscilação forçada amortecida é o movimento de um carro com suspensão ao passar por uma estrada com ondulações. Nesse caso, a força da gravidade é uma força restauradora que age sobre o carro e mantém a sua posição de equilíbrio. As ondulações na estrada, por sua vez, são uma força externa que atua sobre o carro e o força a oscilar. A resistência do ar e a fricção dos pneus com a estrada agem como forças

de amortecimento, diminuindo gradualmente a amplitude do movimento (YOUNG et al., 2003).

Outro exemplo de oscilação forçada amortecida é o movimento de um pêndulo que é submetido a uma força periódica externa. Nesse caso, a força externa pode ser aplicada diretamente sobre a massa do pêndulo ou através de uma força externa que age sobre o suporte do pêndulo. A resistência do ar e a fricção no ponto de suspensão do pêndulo agem como forças de amortecimento, diminuindo a amplitude do movimento do pêndulo com o tempo (YOUNG et al., 2003).

4.1.4 O Balanço de Energia

A energia dos sistemas oscilatórios é um conceito fundamental para a compreensão da dinâmica atuante nesses tipos de movimentos. Considerando situações em que as oscilações podem ser forçadas, amortecidas ou forçadas amortecidas, o balanço de energia assume particularidades que os diferenciam entre si. O comportamento do oscilador é determinado pelas condições em que está submetido; conseqüentemente, as especificidades podem ser observadas e estudadas separadamente.

4.1.4.1 O Balanço de Energia para o Oscilador Amortecido

Como visto anteriormente, nas oscilações amortecidas há sempre a presença de forças externas ou dissipativas que interferem no comportamento da oscilação, como reduzindo a amplitude do movimento ou modificando a velocidade da oscilação.

Em sistemas conservativos, a energia mecânica total do sistema é dada por $E_{mec} = E_c + E_p$ de acordo com a equação (4.9). Mas, uma vez que o sistema apresente forças dissipativas, como atrito ou resistência do ar, parte dessa energia é convertida em outras modalidades que não são úteis ao sistema, configurando a dissipação por amortecimento. Como principal conseqüência, o movimento oscilatório reduz sua amplitude ao longo do tempo.

No sistema massa-mola, por exemplo, onde a energia cinética é dada por

$$E_c = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2, \quad (4.39)$$

e a energia potencial é dada por

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2, \quad (4.40)$$

onde k , constante elástica da mola, pode ser expressa por

$$k = m\omega_0^2, \quad (4.41)$$

sendo m a massa e ω_0 a frequência angular, substituindo as equações (4.39) e (4.40) na equação (4.11) tem-se uma expressão para a energia mecânica de forma que

$$E_{mec} = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2. \quad (4.42)$$

Se o sistema é amortecido, isso implica que a energia total sofre uma diminuição ao longo do tempo graças à ação das forças dissipativas antes mencionadas. Em outras palavras, tem-se a taxa de variação da energia mecânica diferente de zero. Para ser mais preciso, considerando o trabalho da força dissipativa, responsável por essa variação, a taxa de variação da energia é menor que zero.

$$\frac{dE}{dt} \neq 0. \quad (4.43)$$

A taxa de variação da energia é a potência dissipada no sistema ($P = F_d \frac{dx}{dt}$). Então

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}_d \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad (4.44)$$

onde \vec{F}_d é a força dissipativa e $\frac{d\vec{x}}{dt}$ a velocidade.

Considerando a força de amortecimento dissipativa

$$\vec{F}_d = -b \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad (4.45)$$

onde b é o coeficiente de amortecimento, resulta que a taxa de variação da energia pode ser dada por

$$\frac{dE}{dt} = -b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (4.46)$$

A compreensão de como ocorre a variação da energia ao longo do tempo pode ser facilitada tomando a derivada da expressão obtida para a energia mecânica em função do tempo, de forma que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \right]. \quad (4.47)$$

Realizando as derivações, obtém-se como resultado

$$\frac{dE}{dt} = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x \frac{dx}{dt}. \quad (4.48)$$

Igualando as equações (4.46) e (4.48) têm-se:

$$m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x \frac{dx}{dt} = -b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (4.49)$$

Dividindo-se ambos os termos por $\frac{dx}{dt}$ e reorganizando a equação, resulta

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = 0. \quad (4.50)$$

Finalmente, dividindo todos os termos da expressão por m , obtém-se novamente a equação diferencial para o oscilador amortecido, equação (4.24)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4.51)$$

Isolando a aceleração na equação (4.48), substituindo na equação (4.46) e realizando as simplificações possíveis, obtém-se novamente a equação (4.44) comprovando o resultado menor que zero previsto para a taxa de variação de energia ocasionada pela dissipação por amortecimento. Como consequência da dissipação energética, a amplitude do movimento é reduzida ao longo do tempo.

A dissipação total de energia ao longo de um intervalo de tempo ΔT pode ser obtida integrando a taxa de variação de energia nesse intervalo de forma que

$$\Delta E = \int_0^{\Delta T} -b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt. \quad (4.52)$$

A dissipação de energia é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade da massa, o que significa que quanto maior for a velocidade, mais energia é dissipada.

Dentre as análises possíveis, o caso de amortecimento subcrítico é interessante devido à possibilidade de tratar do conceito de energia média do sistema. Para esse tipo de sistema, a solução para a posição x é dada pela expressão

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi). \quad (4.53)$$

onde ω é a frequência angular do sistema amortecido e ϕ é a fase.

A amplitude de oscilação é dada por

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}. \quad (4.54)$$

nota-se que a amplitude decai exponencialmente com o tempo, o que significa que a energia total do sistema diminui progressivamente.

Esse decaimento exponencial também é observado na equação que descreve a energia média total do sistema $E(t)$. Esta energia é proporcional ao quadrado da amplitude $A(t)$, ou seja:

$$E(t) \propto A(t)^2. \quad (4.55)$$

Considerando que a amplitude decai exponencialmente com o tempo t de acordo com a equação (4.54), a energia total $E(t)$ segue a mesma relação, decaindo com o fator $e^{-\frac{b}{m}t}$, e pode ser expressa como:

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{b}{m}t}, \quad (4.56)$$

onde E_0 é a energia inicial do sistema no tempo $t = 0$.

4.1.4.2 O Balanço de Energia para o Oscilador Forçado Amortecido

Consideram-se oscilações forçadas aquelas que recebem a ação de uma força externa periódica, aplicada com o objetivo de compensar as perdas de energia causadas por forças dissipativas. Essa força transfere energia cinética e potencial ao sistema oscilatório. Diferentemente das oscilações amortecidas, em que a energia mecânica diminui ao longo do tempo, no sistema de oscilações forçadas há um suprimento contínuo de energia, o que mantém a oscilação constante ou as amplia.

Para análise energética desse sistema, considerar-se-á novamente o sistema massa-mola, dessa vez oscilando com o auxílio de uma força externa dada por

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos(\omega t), \quad (4.57)$$

sendo \vec{F}_0 a amplitude da força externa e ω a sua frequência angular. De forma que a equação do movimento para esse sistema forçado amortecido será

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t). \quad (4.58)$$

De forma análoga ao oscilador amortecido, o balanço de energia parte do princípio de conservação da energia mecânica $E_{mec} = E_c + E_p$ visto na equação (4.11) resultando na expressão explícita mostrada na equação (4.42).

Também de forma semelhante ao caso anterior, considerando que o oscilador possui amortecimento, então há ação de força dissipativa o que resulta na taxa de variação de energia expressa na equação (4.46). Aqui, no entanto, deve-se considerar que devido a força externa aplicada, existe uma taxa de variação de energia relacionada a mesma, dada por

$$\frac{dE}{dt} = F_0 \frac{dx}{dt} \cos(\omega t). \quad (4.59)$$

A variação de energia ao longo do tempo também é obtida de forma similar ao oscilador amortecido. Realizando a derivação temporal da energia mecânica, obtém-se a expressão mostrada na equação (4.48) e repetida abaixo.

$$\frac{dE}{dt} = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} + m\omega_0^2 \frac{dx}{dt} x. \quad (4.60)$$

Isolando a aceleração na equação (4.58) e substituindo em (4.60) tem-se que

$$\frac{dE}{dt} = m \frac{dx}{dt} \left[\frac{F_0 \cos(\omega t)}{m} - \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} - \frac{m\omega_0^2 x}{m} \right] + m\omega_0^2 \frac{dx}{dt} x. \quad (4.61)$$

Realizando as simplificações possíveis, obtém-se uma expressão para a taxa de variação de energia ao longo do tempo em um oscilador forçado e amortecido dada por

$$\frac{dE}{dt} = F_0 \frac{dx}{dt} \cos(\omega t) - b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (4.62)$$

Por esta equação, é possível observar que a variação de energia total para esse tipo de osciladores depende tanto da energia fornecida pela força externa (primeiro termo) quanto da energia dissipada pelo amortecimento (segundo termo).

Dentre as possíveis análises sobre a energia total do sistema, observa-se que a força externa fornece energia especialmente quando sua frequência se aproxima da frequência natural do sistema, ou seja, quando $\omega = \omega_0$. Essa condição é conhecida como ressonância, resultando em um aumento significativo da amplitude da oscilação. Por outro lado, o amortecimento (segundo termo da equação) dissipa energia, convertendo-a em formas não úteis para a oscilação. Assim, quanto maior o coeficiente de amortecimento b , mais rapidamente a energia mecânica é dissipada. Quando a energia fornecida pela força externa é exatamente balanceada pela energia dissipada pela força dissipativa, o sistema tende a atingir um regime estacionário, no qual a oscilação ocorre com uma amplitude constante.

Nesse regime permanente, a solução para a posição do oscilador é dada por

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi), \quad (4.63)$$

sendo A a amplitude e ϕ a fase, ambos dependentes da frequência da força externa ω , da frequência natural da oscilação ω_0 e do coeficiente de amortecimento b . A expressão para a amplitude pode ser escrita como

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2}}. \quad (4.64)$$

Essa equação mostra que a amplitude da oscilação também é dependente da frequência natural do sistema ω_0 e da frequência da força externa ω , além do coeficiente de amortecimento b . Substituindo a equação (4.64) na equação (4.63) é possível visualizar a solução para a posição do oscilador forçado amortecido no regime estacionário, com a amplitude explicitamente substituída.

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2}} \cos(\omega t - \phi). \quad (4.65)$$

Essa forma explícita mostra diretamente como a amplitude depende dos parâmetros do sistema e da frequência da força externa.

4.1.5 Oscilações Acopladas

Caracteriza-se por oscilação acoplada um sistema onde há dois ou mais osciladores interagindo entre si. Nesse processo, os osciladores transferem energia entre os modos de oscilação. Essas interações podem ser identificadas em diversos sistemas artificiais ou fenômenos naturais, como em circuitos elétricos, vibrações em moléculas e em estruturas da engenharia em geral. A importância de analisar esses comportamentos interacionais reside na perspectiva diferenciada e complexa das características fenomenológicas oriundas dos agrupamentos de osciladores (CUNHA et al., 2024).

Segundo Cunha et al. (2024), quando dois pêndulos simples estão conectados por uma mola, por exemplo, o comportamento oscilatório de um interfere no padrão do outro.

Nesse caso, a oscilação acoplada resulta em um sistema coletivo de oscilação, no qual a energia é transferida periodicamente de um pêndulo para o outro. Caso contrário, os padrões conhecidos de oscilação se manteriam, e cada um deles oscilaria com sua própria frequência natural.

Para esse tipo de configuração de osciladores acoplados, surgem os chamados modos normais de oscilação, caracterizados pelo surgimento de novas frequências. Esses modos normais têm como principal característica a combinação de oscilações que ocorrem com frequência fixa, onde todos os componentes do sistema oscilam com uma razão específica de fase (JÁCOME et al., 2002).

As equações que descrevem o movimento de osciladores acoplados podem ser obtidas de acordo com a configuração de acoplamento entre os componentes do sistema e suas posições relativas. Na resolução, é comum considerar os modos normais de oscilação, mencionados anteriormente. Em um sistema simples de dois osciladores acoplados, por exemplo, geralmente encontram-se dois modos normais de oscilação, isto é, dois padrões nos quais os osciladores do sistema oscilam com a mesma frequência e com uma fase fixa entre si (JÁCOME et al., 2002).

O modo simétrico, ou em fase, caracteriza-se pela sincronia em que os componentes oscilam, movendo-se sempre na mesma direção e com a mesma frequência. A energia é distribuída de forma constante e permanente entre eles. No modo normal assimétrico, ou fora de fase, os componentes oscilatórios movem-se em direções opostas. A energia é trocada periodicamente entre eles, de modo que, em determinado momento, um oscilador terá mais energia do que o outro, invertendo essa situação em um momento posterior. Esses modos representam as frequências naturais do sistema acoplado, podendo, portanto, diferir das frequências naturais de cada um dos osciladores individuais (FRENCH, 2017).

4.2 A mecânica Lagrangiana

A mecânica Lagrangiana é uma formulação alternativa da mecânica clássica, proposta por Joseph Louis Lagrange (figura 4.7) em 1788, que descreve o movimento de partículas e corpos rígidos de uma forma mais geral e elegante. A formulação Lagrangiana é baseada no princípio de Hamilton, que estabelece que a trajetória seguida por um sistema físico é aquela para a qual a ação apresenta um valor estacionário. Isso significa que pequenas variações na trajetória não alteram o valor da ação no primeiro grau de aproximação, o que leva à dedução das equações do movimento por meio do cálculo variacional. Isso permite que a mecânica Lagrangiana seja aplicada a uma ampla variedade de sistemas físicos, desde partículas individuais até sistemas complexos com muitas partículas (MARION; THORNTON; ROBINETT, 2000).

Figura 4.7 – Joseph Louis Lagrange (1736-1813)



Fonte: The Hindu Business Line

Uma das características principais da mecânica de Lagrange é a utilização da função chamada Lagrangiana para descrever a dinâmica de um sistema. A Lagrangiana é uma função que depende da posição e velocidade das partículas, bem como de outras variáveis relevantes, como o tempo. Esta função fornece informações sobre a energia cinética e potencial do sistema e, a partir disso, as equações de movimento do sistema podem ser obtidas através do princípio de Hamilton. A formulação Lagrangiana é muito útil porque simplifica as equações de movimento para sistemas complexos, como partículas em um campo de força variável (GOLDSTEIN; POOLE JR; SAFKO SR, 2012).

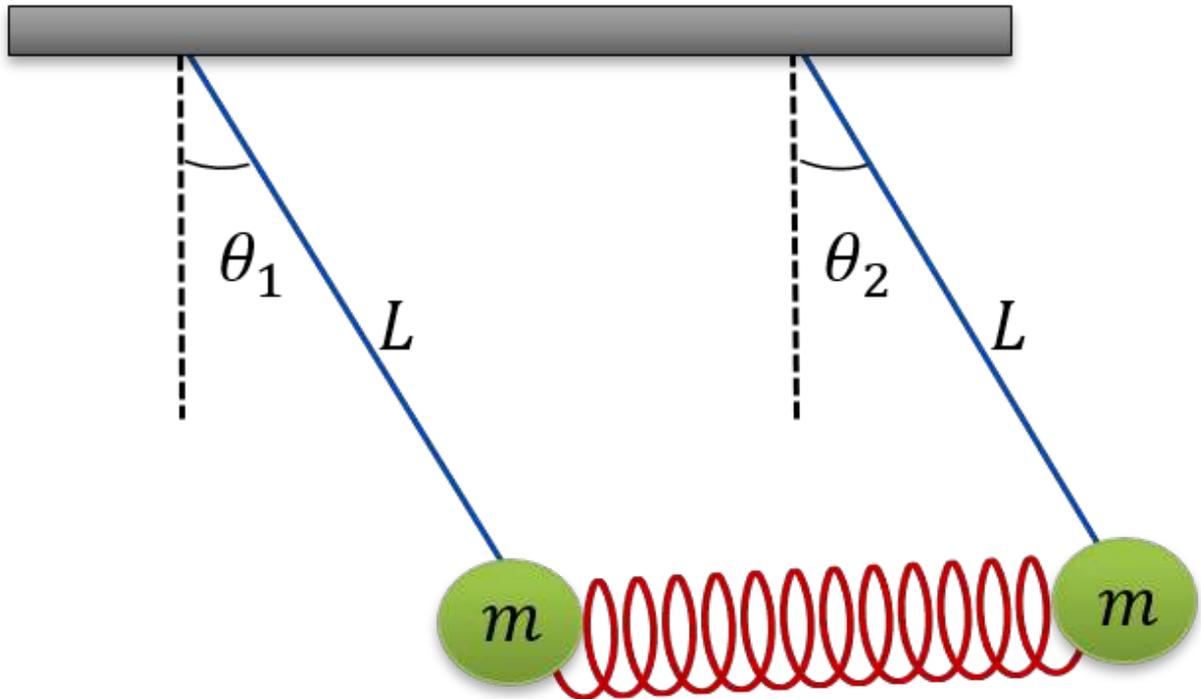
O formalismo Lagrangiano é particularmente útil para sistemas conservativos, onde a energia total é conservada. Para esses casos, pode ser usado para descrever a energia cinética e potencial do sistema, e a conservação da energia pode ser derivada diretamente das equações de movimento. Além disso, o formalismo de Lagrange também é útil para sistemas não conservativos, onde a energia total não é conservada, já que permite que as forças dissipativas sejam levadas em consideração na função (LANDAU; LIFSHITZ, 2013).

Outra característica importante desta mecânica é a possibilidade de utilização de coordenadas generalizadas. Em vez de usar as coordenadas cartesianas habituais para descrever a posição de uma partícula, as coordenadas generalizadas podem fazer esse papel, o que permite uma descrição mais simples do sistema. A escolha por coordenadas generalizadas pode ser realizada no intuito de simplificar a descrição do sistema; por exemplo, podem ser escolhidas para descrever o movimento de um pêndulo simples, um pêndulo duplo ou mesmo um sistema planetário (FOWLES; CASSIDAY, 2016).

4.2.1 A Equação de Lagrange para dois pêndulos acoplados por uma mola de constante elástica k

Como visto antes, a equação de Lagrange pode ser utilizada em uma grande variedade de sistemas físicos. Nessa seção, ela será utilizada para descrever um sistema de dois pêndulos acoplados por uma mola de constante elástica k (figura 4.8).

Figura 4.8 – Pêndulos simples acoplados por uma mola



Fonte: Autoria própria

Partindo das posições das massas que compõem o sistema, em função do ângulo formado entre o fio e a vertical θ_1 e θ_2 tem-se que

- Para a primeira massa m_1 :

$$x_1 = L_1 \sin \theta_1; \quad (4.66)$$

$$y_1 = -L_1 \cos \theta_1. \quad (4.67)$$

- Para a segunda massa m_2 :

$$x_2 = L_2 \sin \theta_2; \quad (4.68)$$

$$y_2 = -L_2 \cos \theta_2. \quad (4.69)$$

Como visto anteriormente (equação 4.39), a energia cinética T é dada por

$$T = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2, \quad (4.70)$$

onde $\frac{dx}{dt}$ é a velocidade. Expressando-a em função das coordenadas da posição das massas, têm-se

- Para a massa m_1 :

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 \left[\left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt} \right)^2 \right]; \quad (4.71)$$

- E para massa m_2 :

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 \left[\left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt} \right)^2 \right]. \quad (4.72)$$

Calculando as derivadas temporais de x_1 , y_1 , x_2 e y_2 :

$$\frac{dx_1}{dt} = L_1 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) \cos \theta_1; \quad (4.73)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = L_1 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) \sin \theta_1; \quad (4.74)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = L_2 \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right) \cos \theta_2; \quad (4.75)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = L_2 \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right) \sin \theta_2. \quad (4.76)$$

Substituindo as derivadas nas equações (4.71) e (4.72):

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 \left[\left(L_1 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) \cos \theta_1 \right)^2 + \left(L_1 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right) \sin \theta_1 \right)^2 \right]; \quad (4.77)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 \left[\left(L_2 \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right) \cos \theta_2 \right)^2 + \left(L_2 \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right) \sin \theta_2 \right)^2 \right]. \quad (4.78)$$

Colocando os termos comuns em evidência e fazendo as simplificações cabíveis, resulta que

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 L_1^2 \left(\frac{d\theta_1}{dt} \right)^2; \quad (4.79)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2 L_2^2 \left(\frac{d\theta_2}{dt} \right)^2. \quad (4.80)$$

Finalmente, é possível escrever a energia cinética do sistema como resultado da soma das energias cinéticas individuais dos pêndulos, tal que

$$T = \frac{1}{2}m_1L_1^2\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2L_2^2\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2, \quad (4.81)$$

onde T é a energia cinética total do sistema, m_1 e m_2 são as massas dos pêndulos e L_1 e L_2 são os comprimentos das hastes.

Da mesma forma, a energia potencial do sistema é caracterizada pela soma das energias potenciais individuais.

A energia potencial gravitacional referente à primeira massa é dada por

$$U_1 = m_1gL_1(1 - \cos \theta_1). \quad (4.82)$$

E referente à massa m_2 :

$$U_2 = m_2gL_2(1 - \cos \theta_2). \quad (4.83)$$

onde m_1 e m_2 são as massas dos pêndulos, L_1 e L_2 são os comprimentos dos fios, g é a aceleração da gravidade e $(1 - \cos \theta)$ é a altura obtida da diferença entre o comprimento do fio L e de sua projeção na direção vertical.

A energia potencial elástica da mola surge da deformação que ocorre devido ao movimento das massas, portanto deve-se considerar a diferença nas posições das duas massas ao longo do eixo horizontal, de forma que

$$U_3 = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2. \quad (4.84)$$

Substituindo x_1 , equação (4.66), e x_2 , equação (4.68), na equação acima, resulta

$$U_3 = \frac{1}{2}k(L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin \theta_2)^2. \quad (4.85)$$

Finalmente, escrevendo a energia potencial total do sistema com o somatório das energias potenciais individuais resulta na seguinte equação:

$$U = m_1gL_1(1 - \cos \theta_1) + m_2gL_2(1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}k(L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin \theta_2)^2. \quad (4.86)$$

onde U representa a energia potencial total do sistema e g é a aceleração da gravidade.

Escrevendo a equação de Lagrange \mathcal{L} para o sistema, dada por:

$$\mathcal{L} = T - U, \quad (4.87)$$

considerando que $L_1 = L_2 = L$ e fazendo as substituições das equações (4.81) e (4.86) na equação de Euler-Lagrange, tem-se que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1L^2\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2L^2\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 + m_1gL \cos \theta_1 + m_2gL \cos \theta_2 - \frac{1}{2}kL^2(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2. \quad (4.88)$$

Essa equação representa a **função de Lagrange** (\mathcal{L}) para um sistema de dois pêndulos acoplados com massas m_1 e m_2 , comprimentos iguais $L_1 = L_2 = L$ e um acoplamento elástico com constante k .

Outra forma de escrever as equações de Euler-Lagrange para o sistema é utilizando derivadas parciais de forma que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (4.89)$$

onde q_i é cada uma das coordenadas do sistema.

Aplicando essa equação para as coordenadas do sistema em análise, obtêm-se:

Para θ_1 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0, \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1, \quad (4.91)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1, \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -m_1 g l_1 \sin \theta_1 - k l_1 \sin \theta_1 (l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_2). \quad (4.93)$$

Portanto, a equação de Lagrange para θ_1 é:

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g l_1 \sin \theta_1 + k l_1 \sin \theta_1 (l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_2) = 0. \quad (4.94)$$

e para θ_2 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0, \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2, \quad (4.96)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2, \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin \theta_2 - k l_2 \sin \theta_2 (l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1). \quad (4.98)$$

Resultando na equação de Lagrange para θ_2

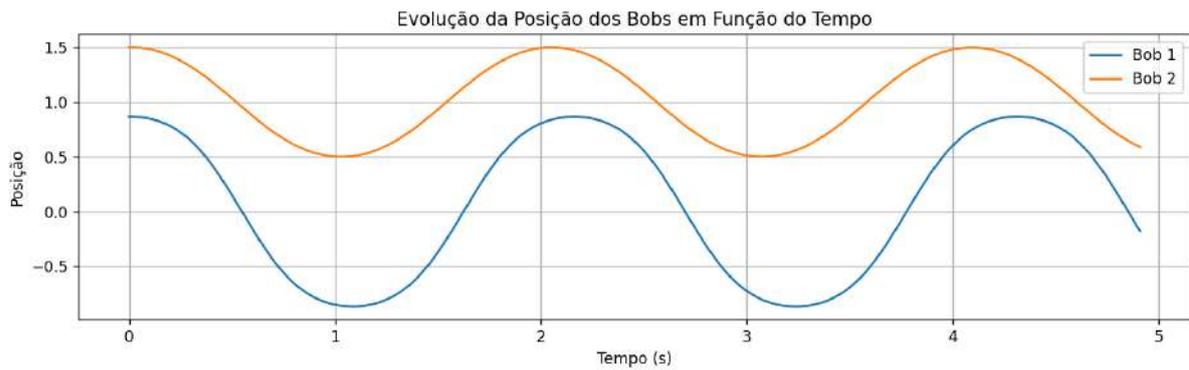
$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \sin \theta_2 + k l_2 \sin \theta_2 (l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1) = 0. \quad (4.99)$$

Nestas equações utilizou-se a forma $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$ para representar as derivadas, diferentemente do que se utilizou anteriormente com o propósito de otimizar a visualização.

Considerando-se um sistema no qual $l_1 = l_2 = L$ é possível simplificar ainda mais a equação.

A Figura 4.9 ilustra a evolução da posição das massas pendulares (“bob”) no sistema de dois pêndulos acoplados por uma mola de constante elástica k . O gráfico foi obtido a partir da simulação computacional, considerando as equações do movimento descritas acima e as interações entre os componentes. O objetivo desta figura é fornecer uma representação visual do comportamento oscilatório do conjunto.

Figura 4.9 – Comportamento ondulatório do sistema de pêndulos simples acoplados



Autoria própria

5 AUTOMAÇÃO, INSTRUMENTAÇÃO E AQUISIÇÃO DE DADOS

A revolução tecnológica vivida nos últimos anos transformou o *modus operandi* dos principais setores da sociedade. A integração de mecanismos que facilitam a vida humana ou otimizam seus esforços tornou-se uma realidade. Na indústria, por exemplo, os processos de produção estão passando por uma transição. Alguns ainda são operados manualmente, enquanto outros seguem o caminho inevitável da automação (RIFKIN, 2011).

Um processo automatizado pode ser entendido como um sistema operacional que requer pouca ou nenhuma intervenção humana. Nesses sistemas físicos, são utilizados atuadores, controladores e sensores para desenvolver tarefas que, muitas vezes, são repetitivas ou exigem um nível de precisão que o ser humano não é capaz de alcançar. Outro aspecto que justifica a automação de processos é a eficiência e segurança na realização das tarefas. Um processo automatizado, quando operado sob parâmetros precisos, não abre margem para as incorreções típicas da atividade humana (GROOVER, 2016).

Na indústria, a automação dos sistemas de produção pode ser agrupada em duas categorias: automação da própria produção e informatização dos sistemas de apoio à produção. Apesar dessa divisão, as duas categorias estão intimamente relacionadas, visto que os sistemas de produção fabris automatizados na operação são implementados por sistemas informatizados, e estes, por sua vez, são incorporados aos sistemas de apoio à produção (LEE; BAGHERI; KAO, 2015).

Para além da indústria, a automação dos processos está presente em áreas que demandam a coleta de dados precisos para análise e controle, como em pesquisas científicas, onde é indispensável para garantir a precisão e a reprodutibilidade dos experimentos. Muitos desses métodos de automação começam na própria instrumentação, que se caracteriza pelo uso de dispositivos para realizar medições, monitoramento e controle das variáveis mensuradas. Esses mecanismos instrumentais, assim como todo o processo de automação, integram sensores, controladores, transdutores e outros dispositivos semelhantes (DOEBELIN; MANIK, 2007b).

5.1 Elementos fundamentais de um sistema de aquisição de dados

5.1.1 Sensores e transdutores

Sensores são dispositivos projetados para detectar grandezas físicas ou químicas, como pressão, luz, temperatura, som e movimento, e convertê-las em sinais elétricos, digitais ou outros sinais mensuráveis. Esses sinais são então interpretados por outros componentes, como computadores ou controladores. Segundo Urban (2016), a designação de sensor é bastante ampla, englobando dispositivos diversos, “desde um olho humano até um gatilho em uma pistola”. Essa variedade reflete a importância dos sensores em diferentes contextos tecnológicos e científicos.

Os transdutores, por sua vez, são mecanismos que possuem como função converter uma forma de energia em outra. Apesar da semelhança entre os dois dispositivos, é importante ressaltar que todos os sensores são transdutores, mas nem todos os transdutores são sensores.

Um exemplo disso é o encoder óptico. Esse dispositivo pode ser classificado como um transdutor, quando atua na conversão de movimento angular ou posição (energia mecânica) em sinais elétricos, ou como um sensor, quando é utilizado para medir ou detectar a posição ou velocidade.

A tabela 5.1 apresenta alguns exemplos de sensores e os respectivos fenômenos que eles são capazes de captar.

Sensor	Grandeza Captada
Sensor capacitivo, Sensor indutivo	Proximidade
Sensor PIR	Movimento
RTDs, Termopares, Termistores	Temperatura
Fotodiodo, LDR	Intensidade da Luz
Manômetro, Transdutor piezoelétrico	Pressão
Acelerômetro	Aceleração
Microfone	Intensidade Sonora
Higrômetro	Umidade
MQ-2	Concentração de Gases
Encoder rotativo	Posição

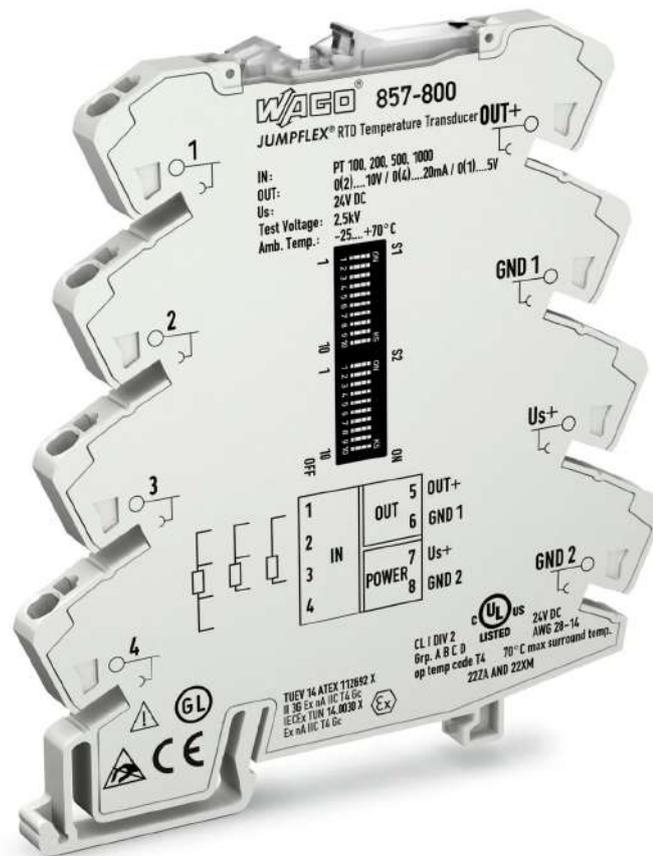
Tabela 5.1 – Sensores e Fenômenos Físicos Medidos

5.1.2 Condicionador de sinal

Como o próprio nome indica, o condicionador de sinais tem como principal função a adaptação do sinal recebido, de forma a torná-lo adequado à entrada do sistema de obtenção de dados. Os sinais analógicos recebidos pelos sensores ou transdutores são ajustados ou transformados ao passar pelo condicionador, possibilitando seu processamento adequado. Dessa forma, as características que se desejam observar apresentam melhor qualidade, facilitando a interpretação dos dados (BATISTA, 1990).

Dentre as possíveis funções de um condicionador de sinais, destacam-se a amplificação de sinais fracos, a filtragem de ruídos ou interferências, a conversão de sinais analógicos para elétricos (e vice-versa), além da linearização de sensores. No exemplo mostrado na figura 5.1, tem-se um condicionador capaz de converter o sinal de temperatura em um sinal analógico padrão no lado da saída (FUNK, 2014).

Figura 5.1 – Condicionador de sinais



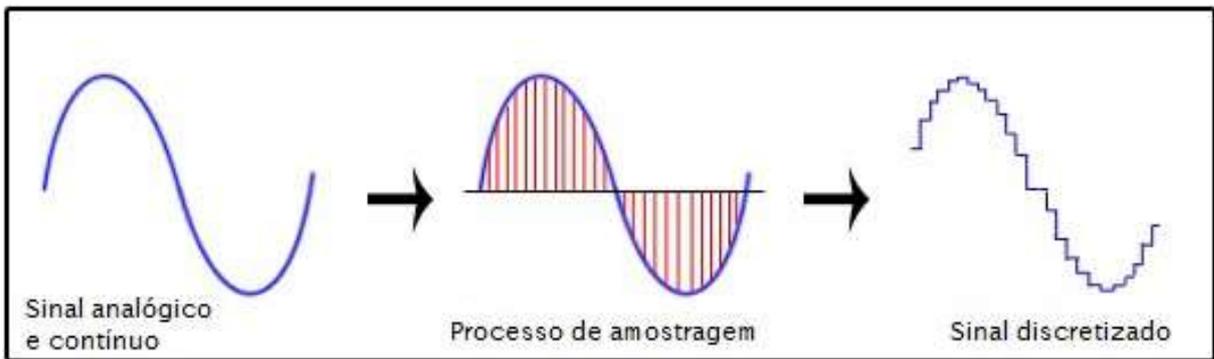
Fonte: Sensores

5.1.3 Conversor A/D

O conversor A/D (analogico para digital) é responsável por transformar os sinais analógicos captados pelos sensores ou transdutores. Essa conversão é necessária devido à disparidade entre as linguagens dos componentes do sistema de aquisição de dados. Como visto, a maioria dos sensores gera sinais analógicos, enquanto computadores e microcontroladores trabalham com sinais digitais. O sinal analógico possui valores contínuos, ou seja, pode variar infinitamente dentro de um intervalo estabelecido. O conversor A/D realiza um “recorte” desse sinal, convertendo-o em valores discretos, que são distintos e específicos, transformando, assim, o sinal analógico em digital. Dessa forma, o microcontrolador ou computador consegue interpretar os dados, uma vez que geralmente utilizam o código binário como linguagem, um tipo de sinal discreto. (FELDMAN, 2013).

Utilizando intervalos de tempo regulares, os sinais analógicos são medidos, gerando uma série de amostras. Em seguida, os valores de cada amostra são aproximados a números inteiros, tornando-se sinais discretos. Por fim, cada valor aproximado é representado por um número binário, permitindo a leitura por equipamentos que utilizam sistemas digitais. A figura 5.2 mostra uma esquematização de como corre esse processo.

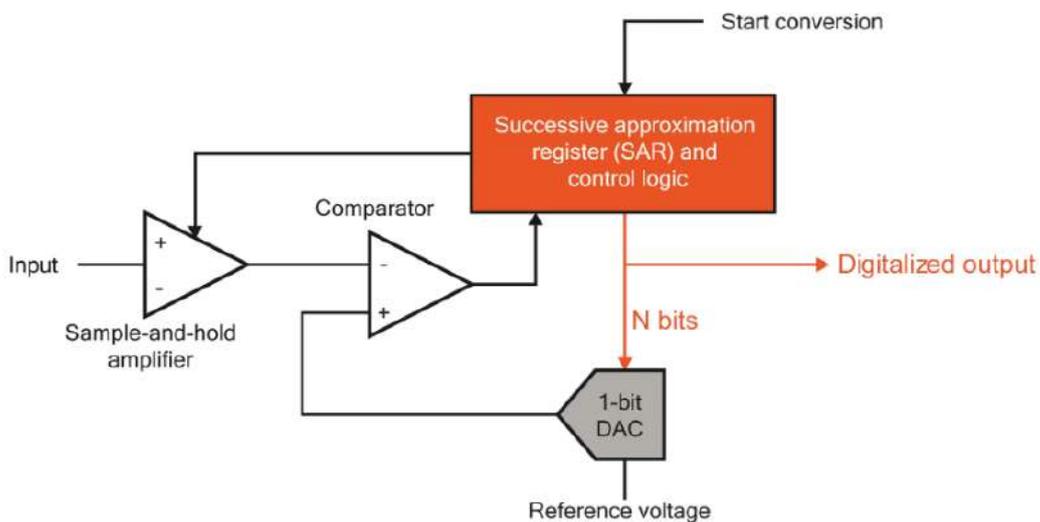
Figura 5.2 – Conversão de sinais analógicos em digitais



Fonte: Embarcados

Atualmente, existe uma ampla gama de conversores A/D no mercado. Entre os diversos tipos, dois dos mais comuns são os conversores de Aproximação Sucessiva e os conversores Delta-Sigma. O processo de funcionamento de cada um é distinto. O conversor de Aproximação Sucessiva inicia com a definição de um valor de referência, utilizado como parâmetro comparativo para o sinal analógico recebido. Esse valor de referência é ajustado a cada bit do sinal digital, diminuindo gradualmente a diferença entre os sinais analógico e digital. Esse processo ocorre bit a bit até que o sinal digital seja constituído integralmente (VASCONCELLOS, 2011). A figura 5.3 mostra o diagrama de bloco de um conversor A/D de Aproximação Sucessiva.

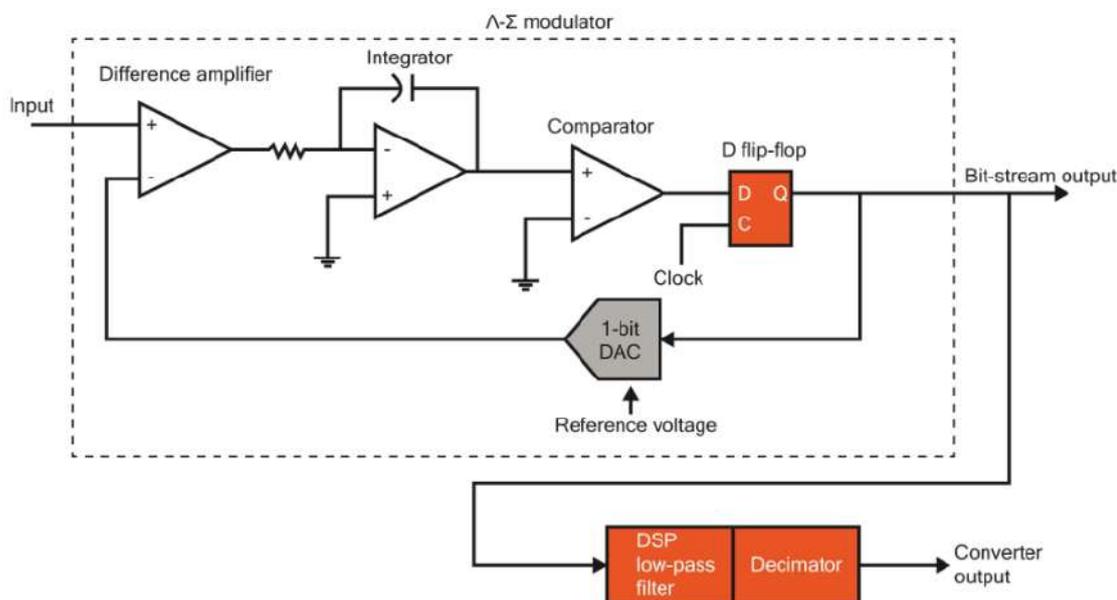
Figura 5.3 – Diagrama de bloco de um conversor A/D de Aproximação Sucessiva



Fonte: Dewesoft

Já os conversores Delta-Sigma utilizam a modulação delta-sigma na conversão de sinais analógicos em digitais. Nesse processo, o sinal analógico é transformado em uma sequência de bits, resultando em um sinal digital com alta taxa de amostragem. Após essa etapa, o sinal passa por um processo de filtragem, com o objetivo de extrair apenas a informação desejada, eliminando os ruídos presentes no processo (KOETZ; CARRO, 1999). A figura 5.4 mostra o diagrama de bloco desse tipo de conversor.

Figura 5.4 – Diagrama de bloco de um conversor A/D Delta-Sigma



Fonte: Dewesoft

A Tabela 5.2 apresenta um comparativo entre os dois tipos de conversores mencionados. Nota-se que, entre as principais vantagens do conversor de Aproximação Sucessiva, estão a maior velocidade e o menor grau de complexidade, sendo recomendado quando esses fatores são prioritários. Por outro lado, o conversor Delta-Sigma é a escolha mais adequada quando se busca obter uma maior resolução e melhor qualidade de sinal.

Característica	Conversor de Aproximação Sucessiva	Conversor Delta-Sigma
Método de Conversão	Comparação sucessiva	Modulação Delta-Sigma
Velocidade	Rápido	Processo mais lento
Resolução	16 ou 18 bits no máximo	24 bits
Complexidade	Simple	Complexidade superior
Aplicações Típicas	Sistemas em tempo real	Áudio digital, instrumentação

Tabela 5.2 – Comparação entre Conversores A/D de Aproximação Sucessiva e Delta-Sigma

5.1.4 Microcontrolador

O microcontrolador é um circuito integrado compacto que contém memória, processador e interfaces de entrada e saída, tudo em um único chip. Ele pode ser considerado um computador em miniatura, desenvolvido em um único circuito integrado. Esses componentes permitem que o microcontrolador execute, de forma autônoma, tanto tarefas simples quanto complexas, como leitura e escrita de dados, armazenamento em firmware, entre outras (SILVA; ARAUJO; CAVALCANTE, 2019).

O microcontrolador atua como o “cérebro” do sistema de aquisição de dados, sendo responsável pela comunicação entre os demais elementos. Ele controla o fluxo de informações captadas pelos sensores e processadas por conversores, condicionadores de sinal e dispositivos de exibição ou armazenamento. Alguns microcontroladores possuem conversores de sinal integrados, capazes de transformar sinais analógicos em digitais e vice-versa. Além disso, eles podem contar com portas programáveis de entrada e saída, que estabelecem conexões com outros dispositivos de controle ou interação com o usuário (MCROBERTS, 2015).

5.1.4.1 A Plataforma de Prototipagem Eletrônica Arduino

Uma das utilizações mais comuns de microcontroladores em automação, prototipagem e desenvolvimento de projetos simples está relacionada à placa programável Arduino.

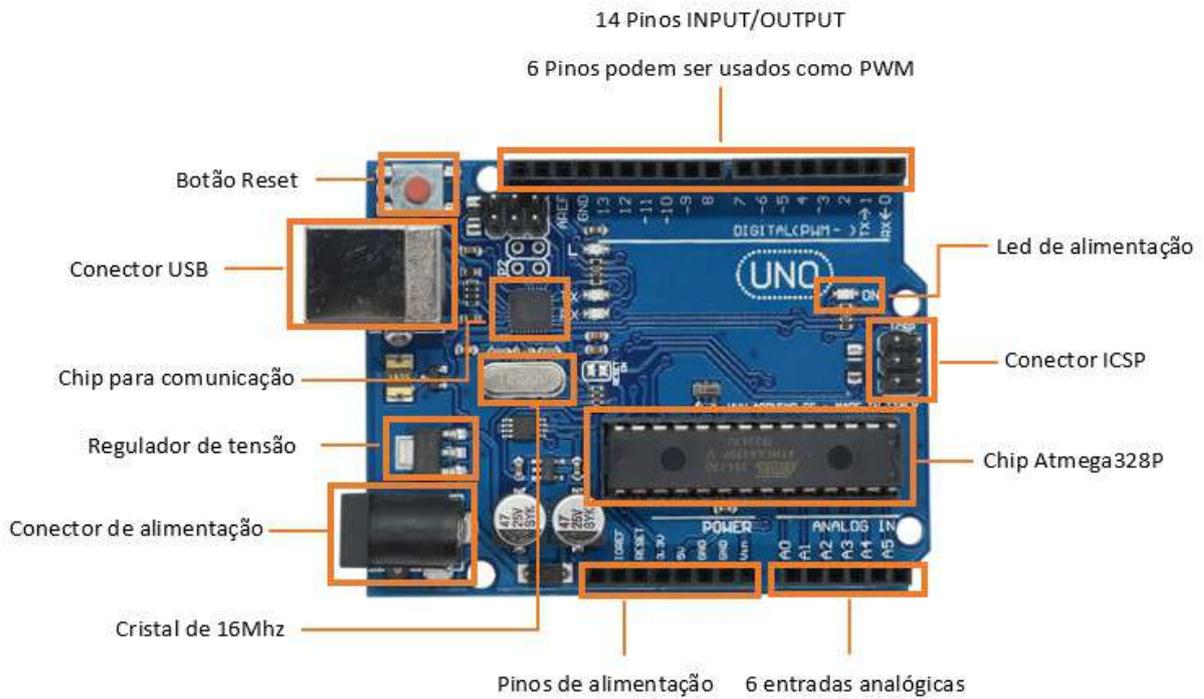
A plataforma surgiu na Itália em 2005, com o objetivo principal de fornecer uma ferramenta simples, de fácil manuseio e baixo custo para profissionais de diversas áreas, como engenharia, design e entusiastas da tecnologia em geral. A não necessidade de um vasto conhecimento em programação permitiu que essa tecnologia fosse amplamente utilizada em ambientes educacionais, inclusive em escolas públicas (SILVA, J. L. d. S. et al., 2014).

O componente principal da placa Arduino é o microcontrolador central, além dos pinos de entrada/saída analógicos e digitais, o que permite a comunicação com uma grande variedade de sensores. O Arduino UNO, um dos modelos mais utilizados atualmente, por exemplo, utiliza um controlador ATmel ATmega328p, um dispositivo de 8 bits da classe AVR, com "arquitetura RISC avançada e encapsulamento DIP28." Ele conta com 32 kB de Flash (sendo 512 bytes utilizados pelo bootloader), 2 kB de RAM e 1 kB de EEPROM (MCROBERTS, 2015).

A plataforma possui hardware open source, permitindo que qualquer pessoa crie seu próprio dispositivo Arduino, podendo modificá-lo ou adaptá-lo conforme suas necessidades. O software utiliza uma linguagem baseada em C/C++ e conta com uma interface simplificada (IDE), o que possibilita o desenvolvimento e a execução do código diretamente na placa (MCROBERTS, 2015).

A figura 5.5 mostra os principais elementos de uma placa de prototipagem Arduino, modelo UNO.

Figura 5.5 – Placa Arduino UNO



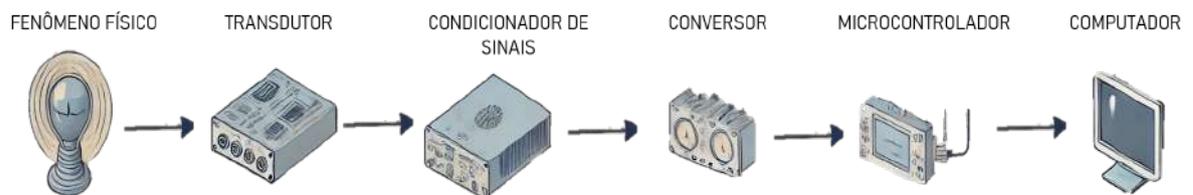
Fonte: STA Eletrônica

5.1.5 Computador

O computador se estabelece como o último elemento do sistema, uma vez que o software utilizado para disponibilizar os sinais captados inicialmente pelos sensores é executado e os dados são exibidos ou armazenados nesse componente. Esse dispositivo proporciona uma interface intuitiva para o usuário final, consolidando os dados brutos capturados e processados pelos demais dispositivos. A característica intuitiva da interface permite que o monitoramento e controle das informações ocorram de forma facilitada, tornando-as úteis e acionáveis (SERRANO et al., 2004).

Uma esquematização de como os elementos do sistema de aquisição de dados podem estar organizados sequencialmente é mostrada na figura 5.6.

Figura 5.6 – Esquematização do sistema de aquisição de dados



Fonte: IA adaptada

5.2 Automação no controle dos sistemas oscilantes Acoplados

Um oscilador harmônico simples é um sistema físico cuja principal característica é a movimentação oscilatória em torno de uma posição de equilíbrio. O sistema massa-mola é um dos exemplos mais conhecidos em que é possível observar esse fenômeno. No entanto, oscilações estão presentes em diversos sistemas da natureza, desde sistemas mecânicos artificiais até sistemas biológicos e redes de comunicação (BASSALO; CATTANI, 2009).

Muitos desses osciladores harmônicos atuam em conjunto, formando um sistema de osciladores acoplados. Essa combinação se diferencia de um sistema isolado, pois a oscilação de um influenciará o comportamento do outro. Essa dinâmica complexa estabelece parâmetros distintos que podem ser estudados e generalizados para diferentes situações. A análise desse tipo de comportamento sistêmico é importante para a compreensão de fenômenos como ressonância, transferência de energia e modos normais de oscilação (SILVA; MACAU, 2012).

O aprimoramento da visualização de fenômenos físicos está intimamente relacionado ao desenvolvimento de tecnologias acessíveis e de fácil manuseio. Com a automatização da aquisição de dados, é possível realizar uma análise detalhada e precisa, já que a captação pode ocorrer em tempo real, permitindo o ajuste das informações de acordo com os parâmetros estabelecidos dos osciladores.

A automação de sistemas pendulares acoplados pode ser realizada utilizando transdutores disponíveis no mercado, que possuem preços acessíveis e ampla compatibilidade com mecanismos de aquisição de dados. Os encoders ópticos incrementais são exemplos de sensores que desempenham essa função, pois são capazes de captar fenômenos físicos, como posição, direção, velocidade linear e angular, entre outros (BISINOTTO; CANCIAN; DE OLIVEIRA, 2015).

5.2.1 Funcionamento do encoder óptico incremental

Quando se busca controle e precisão em sistemas automáticos, os encoders ópticos incrementais são uma escolha viável, especialmente para análise de posições ou movimentos angulares. Sua função principal é converter sinais mecânicos lineares ou rotativos em pulsos analógicos ou digitais. São amplamente utilizados para medir rotações por minuto (RPM) de motores elétricos, como motores de passo, e também para monitorar posição, velocidade, movimento e direção em outros dispositivos (FERRAZ; OLIVEIRA JUNIOR, 1992). A figura 5.7 mostra um encoder incremental óptico de 1000 pulsos.

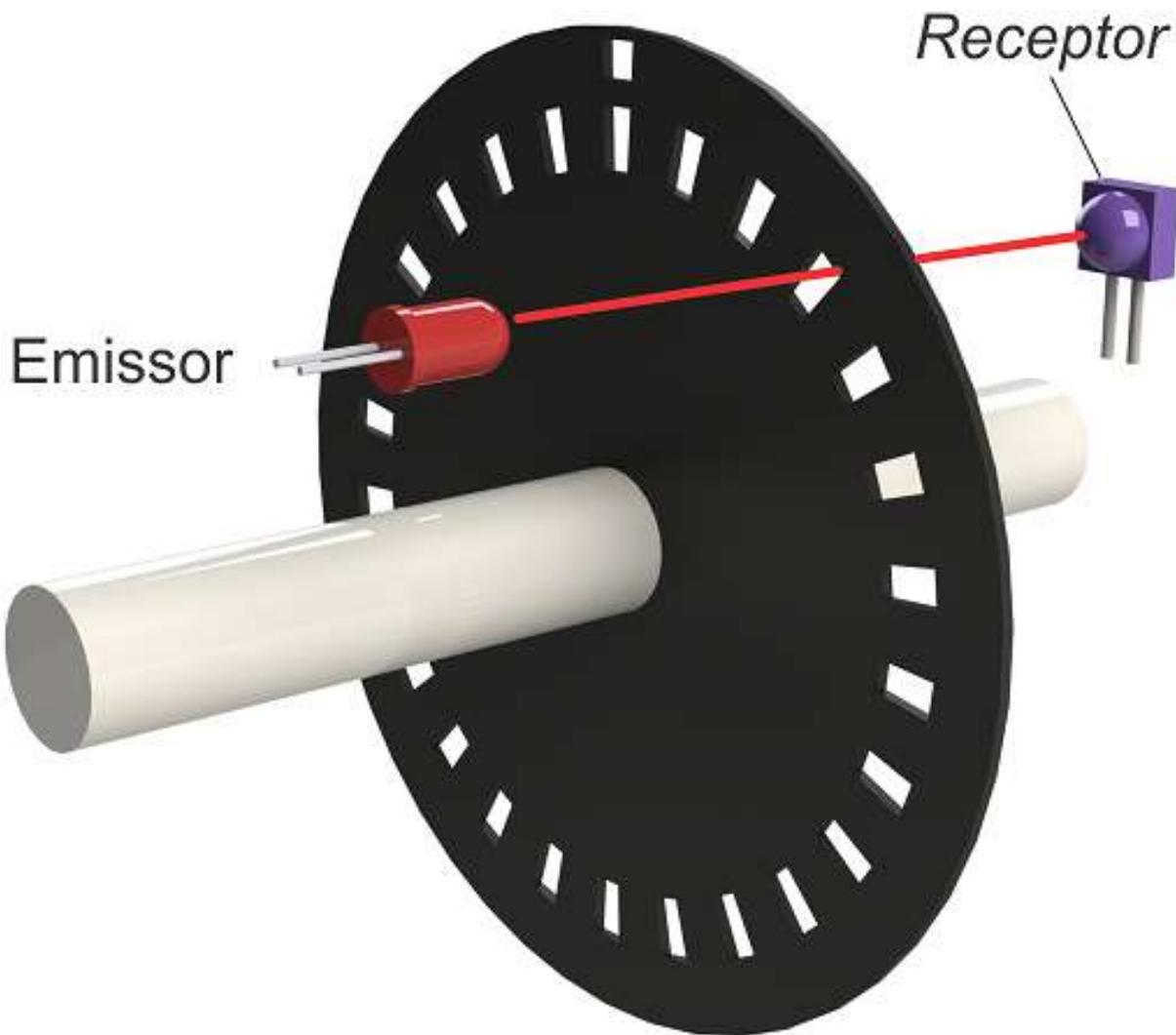
Figura 5.7 – Encoder incremental óptico



Fonte: Autoria própria

Esse mecanismo é composto, basicamente, por um disco com marcações que bloqueia ou libera o feixe de luz de um LED para o fotodetector, o qual inclui um emissor e um receptor (figura 5.8). As marcações no disco estão relacionadas à resolução do equipamento, pois, à medida que o disco gira, um sinal em forma de onda quadrada (clock) é enviado pelo fotodetector e pelo circuito eletrônico para as saídas do encoder. Esse sinal é proporcional ao número de marcações no disco, determinando sua resolução. A quantidade de pulsos está diretamente relacionada à precisão na captura da posição. No entanto, fatores como erro de excentricidade, desalinhamento do sensor, variações na largura das marcações do disco, ruído eletrônico e interferências ópticas podem introduzir erros sistêmicos na medição. Nessas condições, mesmo uma alta resolução não será suficiente para corrigir tais imprecisões. (INÁCIO, 2009).

Figura 5.8 – Elementos constituintes do encoder



Fonte: HI Tecnologia

Na figura 5.9 é possível visualizar alguns exemplos de discos e sua quantidade de marcações (pulsos). Esse valor faz referência ao número de pulsos elétricos gerados a cada rotação completa em torno do eixo no qual o encoder está instalado.

Figura 5.9 – Resoluções de encoders

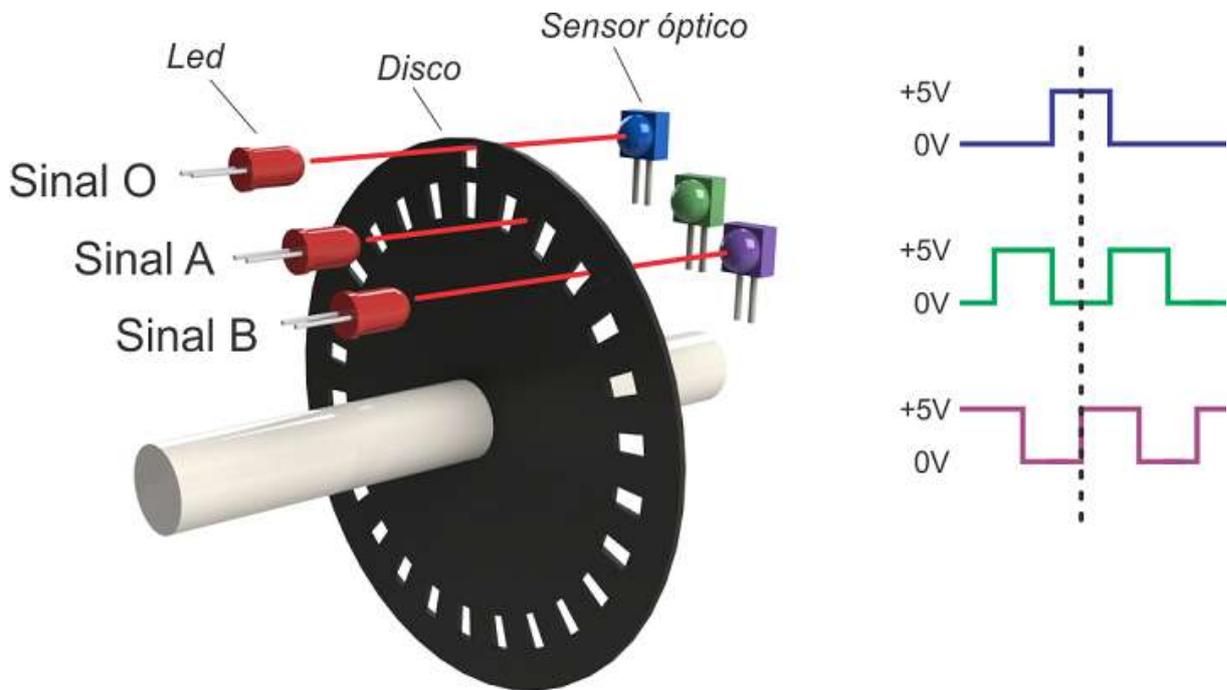


Fonte: HI Tecnologia

A particularidade dos encoders ópticos incrementais, amplamente utilizados, reside

nas suas múltiplas saídas. Os modelos mais comuns possuem três saídas: “A”, “B” e “O”. Essas saídas estão associadas, respectivamente, ao ângulo de rotação, medido pelos pulsos conforme o disco gira, ao sentido da rotação, com defasagem angular de $\pm 90^\circ$, e à indicação de quando uma volta se encerra e outra começa (TIAGO, 2013). A figura 5.10 mostra a estrutura esquematizada dos principais elementos desse tipo de encoder.

Figura 5.10 – Estrutura do encoder óptico incremental



Fonte: HI Tecnologia

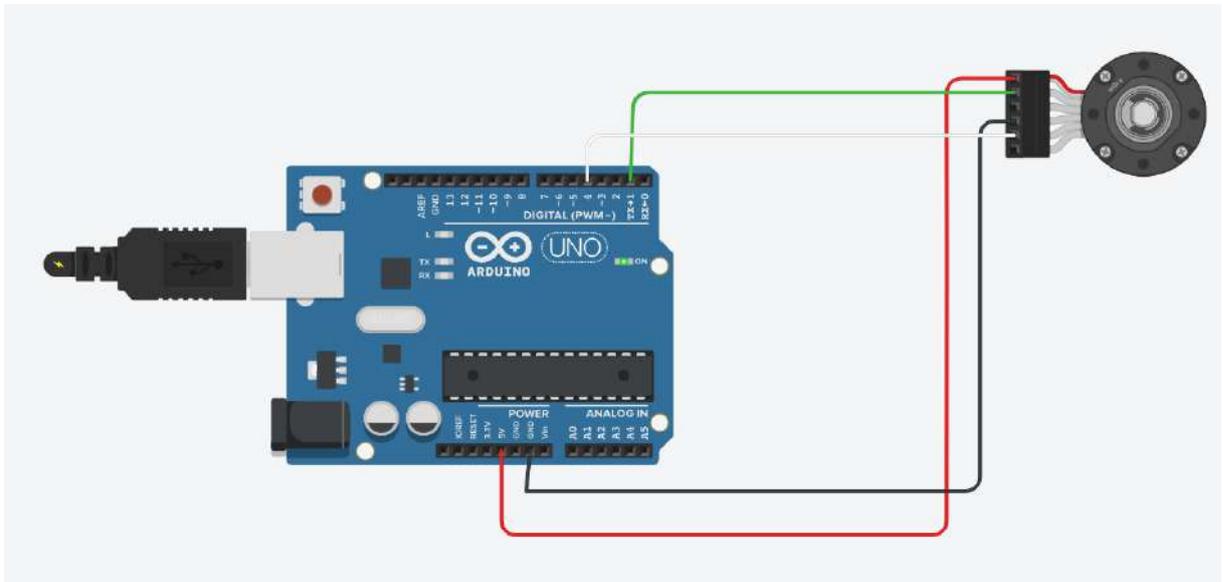
5.2.2 Placa Arduino UNO e microcontrolador

A placa programadora Arduino é uma plataforma *open-source*, o que permite que qualquer indivíduo possa contribuir com o seu desenvolvimento. Seu código fonte está disponível publicamente e a programação física baseada em uma placa com microcontrolador simples, garante uma democratização de objetivos desejados pelos utilizadores por benefícios que incluem não somente a customização do código, mas também colaboração entre desenvolvedores, transparência e custo. A vasta compatibilidade com sensores e interruptores permite que a placa Arduino seja utilizada no desenvolvimento de objetos interativos e atue na visualização e controle de fenômenos associados ao funcionamento de motores, luzes, entre outros dispositivos físicos. Desta forma, é possível constatar as potencialidades integrativas entre computador e mundo físico obtidas a partir dessa ferramenta poderosa e versátil (SILVA; ARAUJO; CAVALCANTE, 2019).

Para realizar medidas comportamentais de osciladores acoplados, por exemplo, a placa programável Arduino recebe os sinais gerados pelo encoder a partir da movimentação dos pêndulos. A partir desses dados, ela é capaz de monitorar as posições angulares em tempo real. Com base nas informações obtidas, é possível analisar o comportamento completo do sistema, como velocidade, variações de ângulo, frequência e as características específicas do acoplamento.

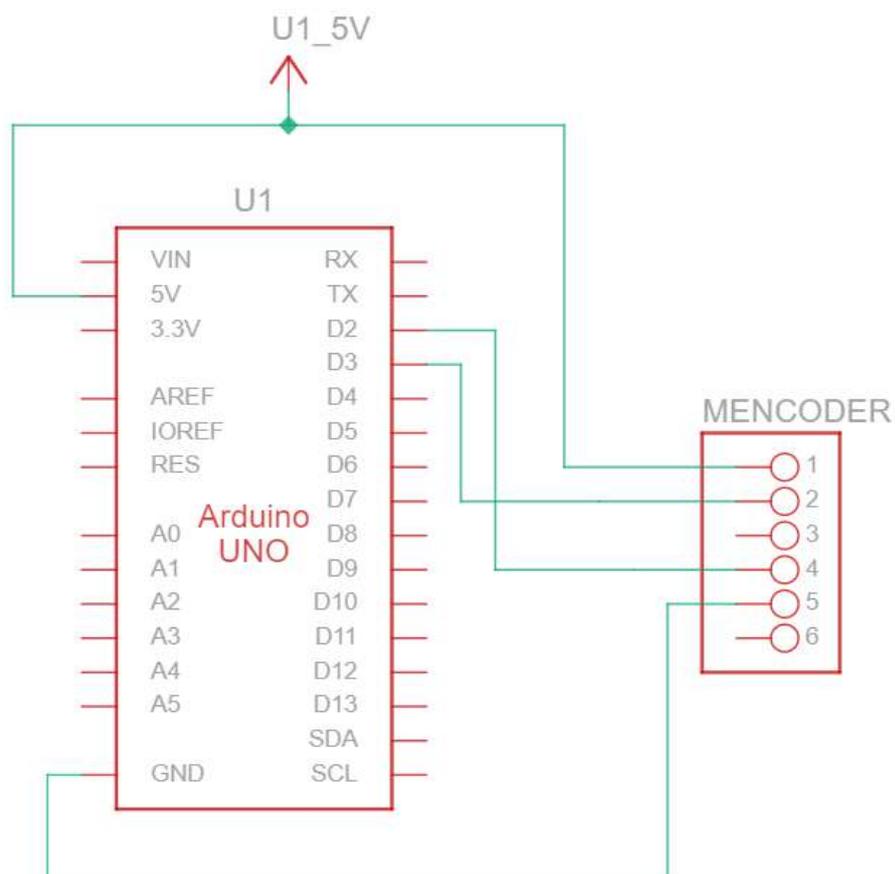
No geral, os encoders ópticos incrementais possuem 4 ou 5 pinos e a ligação entre o sensor e a placa Arduino é bastante intuitiva. As figuras 5.11 e 5.12 mostram uma esquematização de como ocorre a conexão entre a plataforma Arduino e o encoder. O pino VCC (Voltage at the Common Collector) é responsável pela alimentação do circuito. Normalmente, apresenta uma tensão de 5V e é ligado diretamente à placa. Já o terra, utilizado como ponto de referência de tensão, é ligado na porta GND. Os canais A e B são responsáveis pela captação da rotação do eixo do encoder; quando o movimento acontece, enviam pulsos indicando a orientação do giro. Esses pinos são ligados aos canais digitais da placa Arduino responsáveis pela leitura dos pulsos recebidos.

Figura 5.11 – Ligação entre encoder e placa Arduino



Fonte: Autoria própria

Figura 5.12 – Vista esquemática do circuito



Fonte: Autoria própria

6 APARATO EXPERIMENTAL

A concepção desse trabalho leva em consideração uma pesquisa bibliográfica consistente, a qual estabelece a consolidação de aparatos utilizados em demonstrações e investigações de fenômenos físicos utilizando a tecnologia disponível e de fácil acesso, Arduíno. A relevância do aparato desenvolvido nessa pesquisa se equipara a tantas outras observadas e citadas ao longo do texto, com o diferencial de ser uma proposta nova e que, portanto, agrega valor à Ciência e ao desenvolvimento tecnológico, bem como fortalece a inclusão de ferramentas e/ou recursos didáticos acessíveis em salas de aula de contextos diversos.

Além da bibliografia considerada, fez-se necessário um vasto estudo sobre a plataforma programável Arduíno, sobre o código necessário para o funcionamento, a montagem do circuito e os elementos constituintes. Paralelamente a isso, a abordagem exigiu o desenvolvimento de saberes relacionados a desenhos técnicos estruturais em AutoCAD, adaptação ao ambiente de desenvolvimento e linguagem de programação gráfica LabVIEW para exibição em tempo real dos gráficos, além do desenvolvimento de códigos computacionais em Python para integração numérica das equações do movimento pendular e para a visualização gráfica.

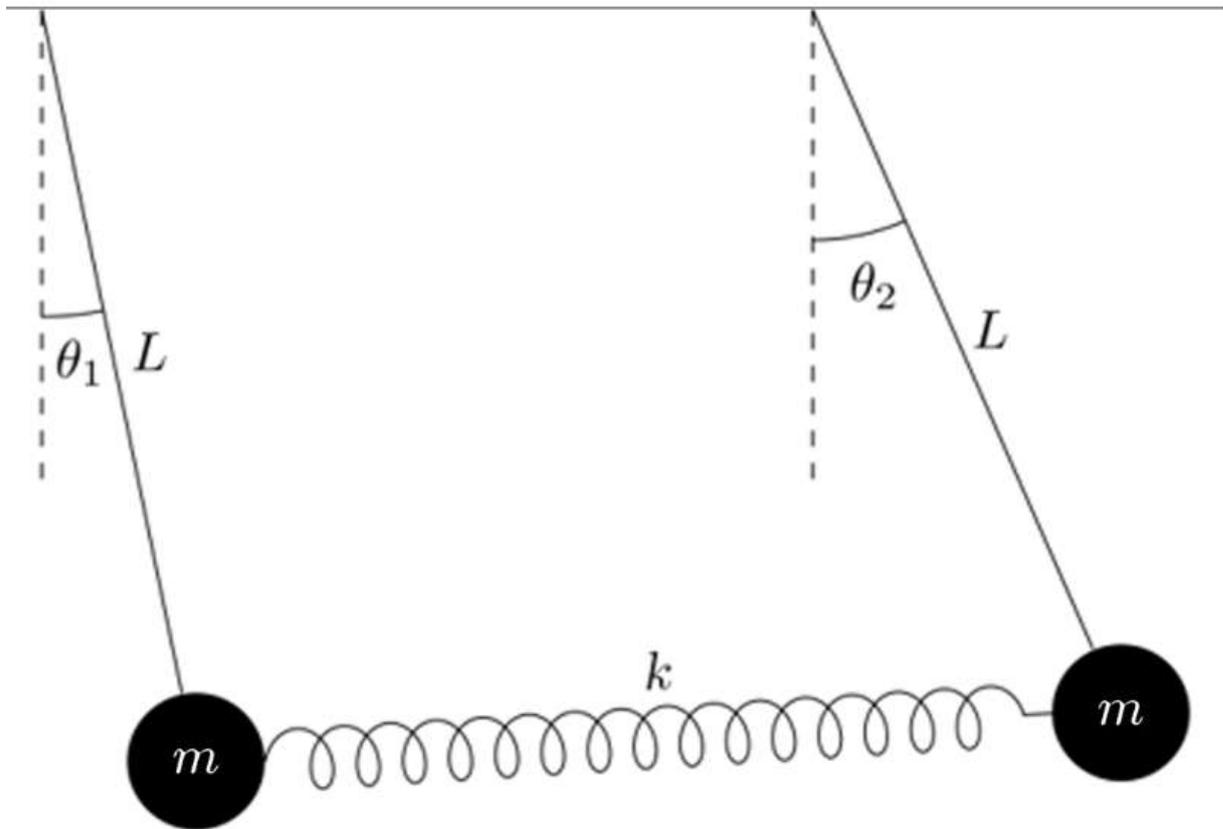
A construção do aparato físico foi desenvolvida quase que integralmente no Laboratório de Materiais para Aplicações em Dispositivos Eletrônicos LABMADE da Universidade Federal do Norte do Tocantins. A unidade conta com uma infraestrutura física de aproximadamente 120 m² dividida em 6 salas. Conta também com diversas facilidades de pesquisa, entre elas microcomputadores, ferramentas, máquinas, softwares de desenho técnico, softwares para instrumentação, bancadas, entre outras. Também conta com tecnologia, desenvolvida através de vários anos, em instrumentação, automação, controle de sistemas e aquisição analógico-digital de dados de grandezas físicas.

No que se refere ao sistema físico em estudo, o LABMADE tem direcionado suas pesquisas para sistemas dinâmicos não lineares. Além de abordar a descrição física de sistemas mecânicos, o foco tem sido ampliado para o estudo do formalismo matemático, com ênfase em espaços topológicos e variedades.

A motivação para o presente trabalho parte do fato de que boa parte dos objetos materiais, em especial os sólidos, pode ser considerada como um conjunto muito grande de osciladores harmônicos simples acoplados entre eles (átomos e moléculas em materiais sólidos). É de interesse para os físicos, do ponto de vista teórico, experimental e didático, compreender como esse efeito de acoplamento pode afetar o comportamento de cada um dos osciladores individuais.

Um sistema simples que pode ajudar a entender esse comportamento complexo pode ser construído a partir de dois pêndulos idênticos de comprimento L interconectados por uma mola com alguma constante elástica k , como mostra a figura 6.1. Pode-se estudar o movimento de cada um usando a formulação de Lagrange da mecânica clássica (THORNTON; MARION, 2019).

Figura 6.1 – Esquematização de dois pêndulos acoplados por uma mola

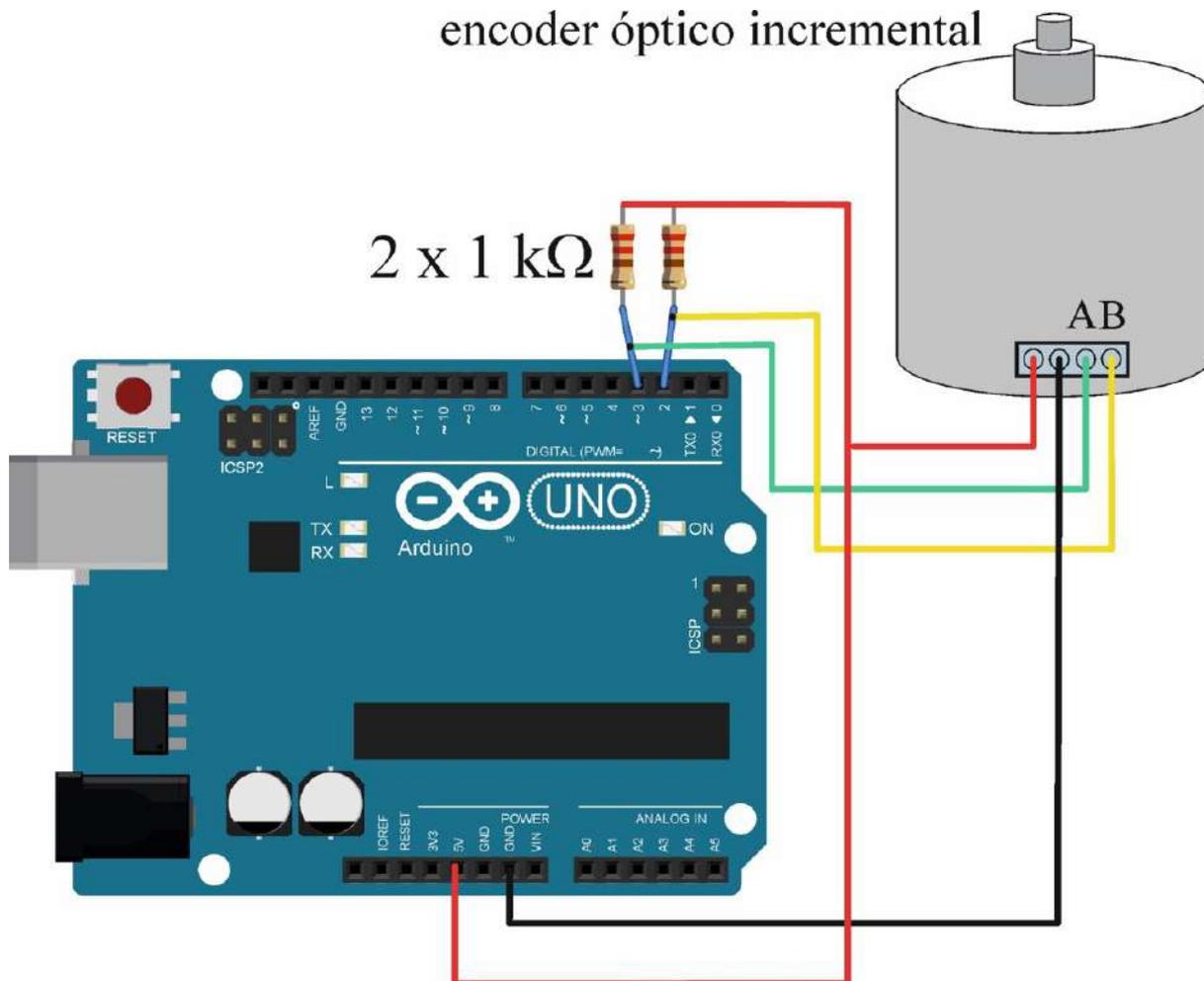


Fonte: N. M. Sotomayor

Dessa forma, o aparato físico constitui-se basicamente dos elementos citados acima (dois pêndulos acoplados por uma mola de pequena constante elástica). Uma estrutura de madeira foi desenvolvida a fim de fixar os pêndulos minimizando alterações verticais. Tal estrutura conta também com um trilho que permite variar as posições horizontais de cada pêndulo. A captação das oscilações mecânicas é realizada por meio de encoders ópticos e posteriormente transformadas em sinais digitais com o intermédio da plataforma programável Arduino, como é possível visualizar na esquematização disposta na imagem 6.2.

Figura 6.2 – Diagrama da conexão entre encoder e Arduino

encoder óptico incremental



Fonte: N. M. Sotomayor

A Figura 6.3 apresenta o esquema detalhado da estrutura do sistema físico, elaborado no software de desenho técnico AutoCAD. Esse esquema fornece uma visão clara e precisa dos componentes estruturais e da disposição geométrica do sistema, servindo como base para a construção e análise do modelo.

Figura 6.3 – Desenho da estrutura física em AutoCAD



Fonte: Autoria própria

Os materiais utilizados na confecção do aparato físico citados acima estão dispostos abaixo:

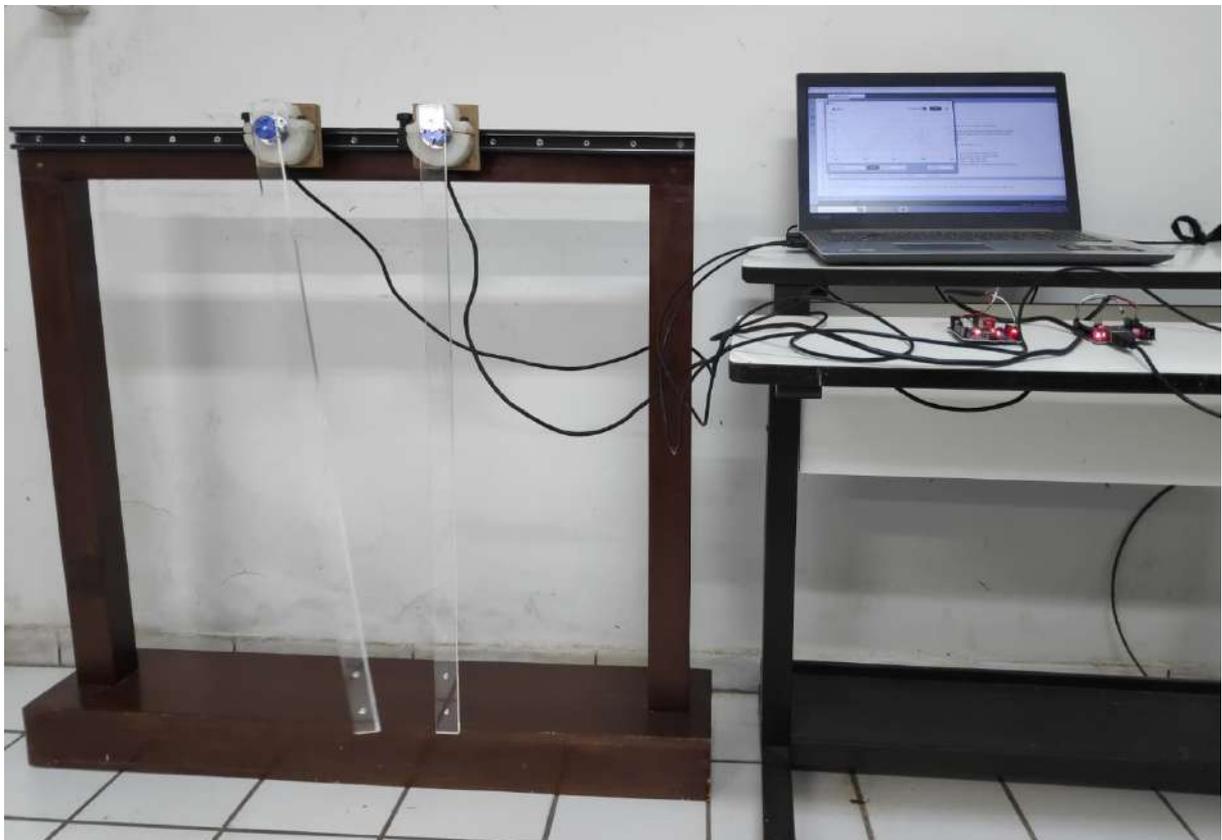
Lista de materiais utilizados:

- Portal de madeira;
- Guia linear;
- Blocos deslizantes;

- Encoders óptico;
- Suporte de poliamida;
- Bloco de madeira;
- Hastes de acrílico;
- Flanges;
- Parafusos;
- Mola;
- Placas programáveis Arduino UNO;
- Cabos USB tipo B.

A montagem do aparato físico, integrando todos os componentes mencionados, foi realizada no Laboratório de Materiais para Aplicações em Dispositivos Eletrônicos (LABMADE) da Universidade Federal do Norte do Tocantins (UFNT). A Figura 6.4 ilustra a disposição final dos elementos, culminando na testagem e comprovação de seu funcionamento satisfatório.

Figura 6.4 – Teste do dispositivo



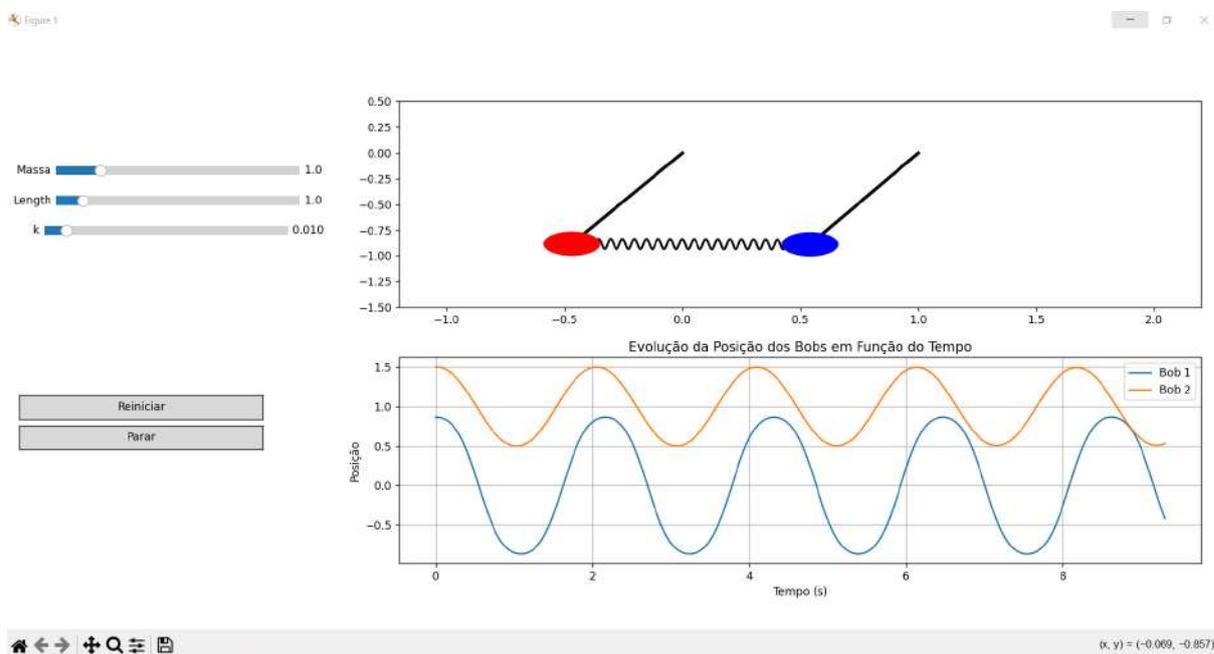
Fonte: A autoria própria

6.1 Parte computacional

Antecedendo a visualização prática do funcionamento do aparato experimental, foi desenvolvido um código em Python para simular e visualizar o movimento oscilatório dos dois pêndulos acoplados por uma mola (Apêndice C1). Esse código utiliza técnicas de integração numérica para resolver as equações de movimento do sistema, considerando as interações entre os pêndulos e as forças elásticas da mola. Além disso, fornece uma interface gráfica interativa que permite visualizar a dinâmica do sistema em tempo real, com a possibilidade de ajustar parâmetros como massa, comprimento dos pêndulos e constante elástica da mola.

O algoritmo modela o comportamento dinâmico dos pêndulos acoplados, considerando forças gravitacionais e elásticas. Ele calcula as posições e velocidades angulares ao longo do tempo, reproduzindo com fidelidade o comportamento oscilatório do sistema. A integração da animação que exibe a movimentação dos pêndulos e da mola, do gráfico de evolução temporal que mostra as posições variadas ao longo do tempo e dos controles interativos que permitem que o usuário modifique os parâmetros do sistema, garante uma experiência completa e rica, com possibilidade de análises aprofundadas e dinamizadas, visto que facilita a compreensão dos conceitos físicos, tornando a experiência prática visual um complemento importantíssimo ao aprendizado teórico. A imagem 6.5 mostra a interface interativa da simulação.

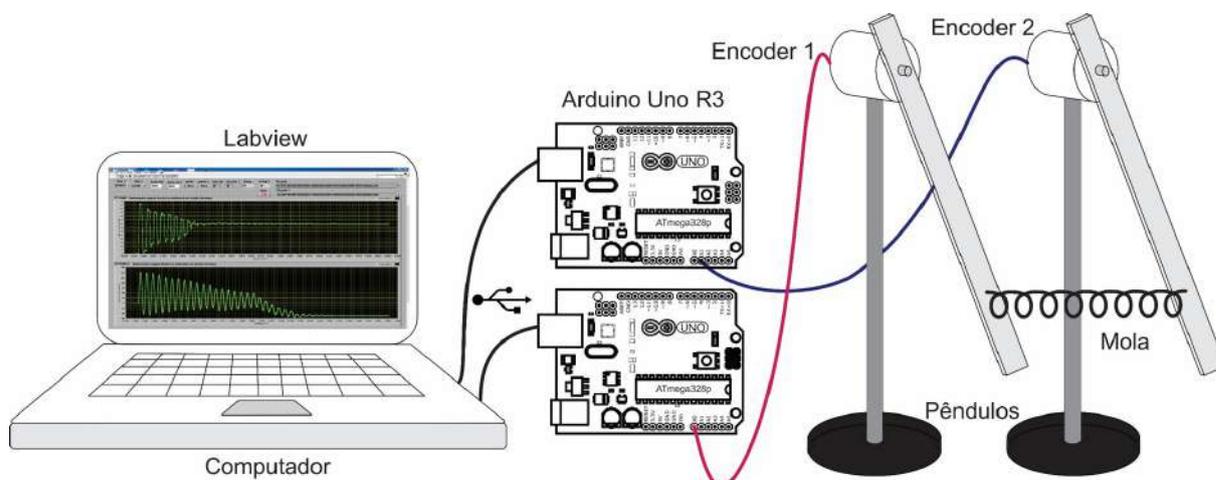
Figura 6.5 – Interface da simulação em Python



Fonte: Autoria própria

A última parte da montagem do dispositivo constituiu-se da integração do mesmo ao computador, como visto na figura 6.4. Os pêndulos acoplados pela mola e fixados aos encoders ópticos foram ligados cada um a uma placa Arduino UNO e estas, por sua vez, ao computador. A figura 6.6 mostra a configuração esquemática do aparato.

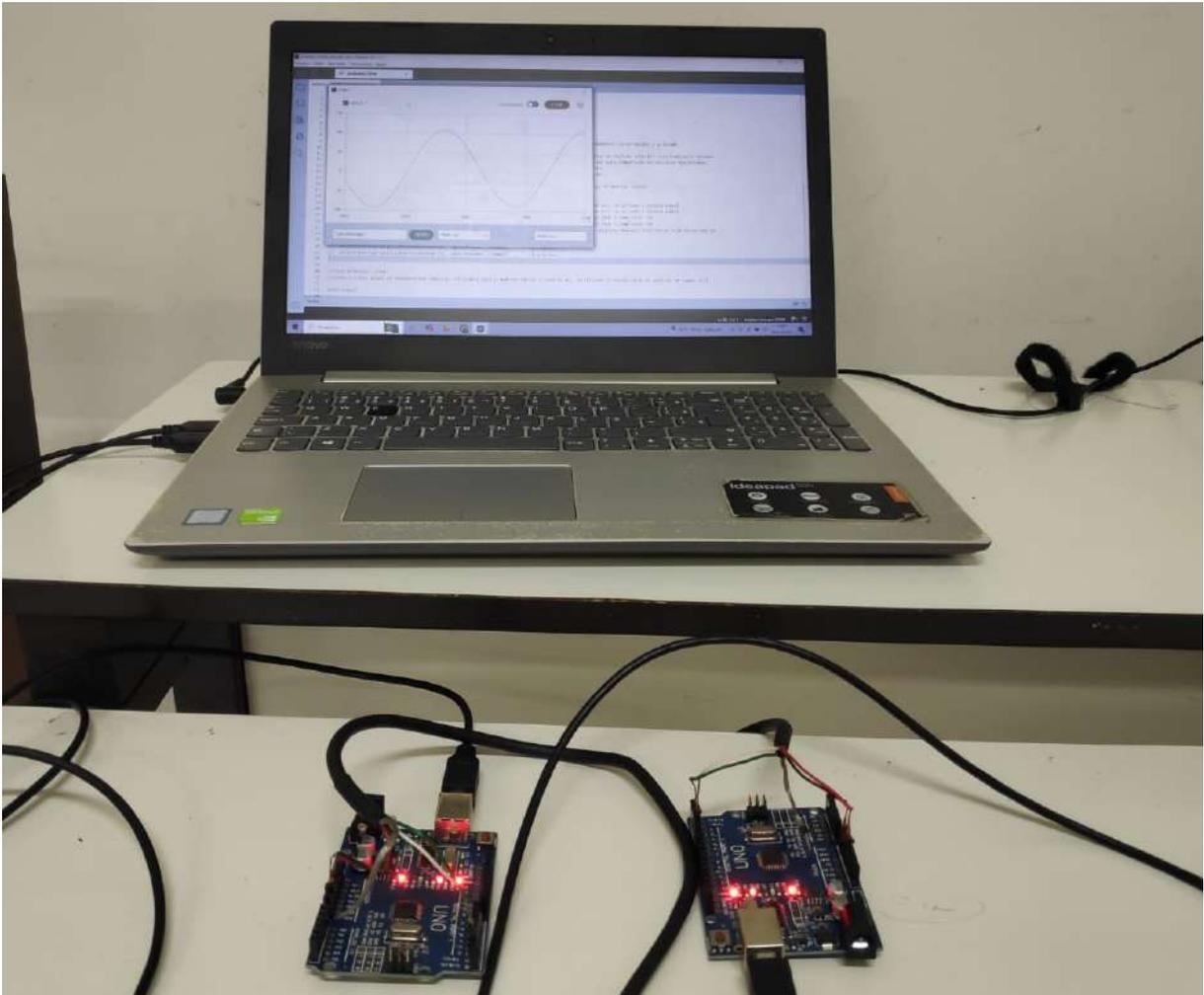
Figura 6.6 – Esquemática do aparato integrado ao computador



Fonte: N. M. Sotomayor

Feita a conexão dos mecanismos ao computador, a etapa seguinte constituiu-se na elaboração de um código computacional no ambiente de desenvolvimento da plataforma Arduino para decodificação do movimento angular dos pêndulos. Com isso, foi possível realizar os primeiros testes para verificação de funcionamento do aparato. O código utilizado está disposto no apêndice C2 deste trabalho. A figura 6.7 mostra a realização de testes para a verificação da captação dos sinais emitidos.

Figura 6.7 – Teste do código Arduino



Fonte: Autoria própria

O Ambiente de Desenvolvimento Integrado (IDE) é o local onde ocorre a escrita do código e a definição das instruções enviadas à placa controladora, sendo, dessa forma, indispensável para a programação e o controle do microcontrolador Arduino. Trata-se de um software de código aberto que permite ao usuário escrever, compilar e transferir programas, chamados de “*sketches*”, para a placa programadora, possibilitando o desenvolvimento de projetos interativos e a automação de experimentos.

Graças ao seu caráter acessível e flexível, a plataforma tem se popularizado e é frequentemente utilizada em contextos educacionais e de prototipagem. Sua utilização é bastante intuitiva, o que possibilita o uso eficiente mesmo por pessoas sem vasto conhecimento em programação. A linguagem derivada de C/C++ é mais uma vantagem, visto que são linguagens amplamente utilizadas e democratizadas, sobretudo na última década.

O Ambiente de Desenvolvimento Integrado (IDE) do Arduino conta ainda com a ferramenta integrada Serial Plotter, que permite visualizar graficamente os dados enviados pela porta serial. Essa funcionalidade é especialmente útil para monitorar em tempo real variáveis de sensores, resultados de cálculos ou qualquer dado gerado pelo microcontrolador. A representação visual facilita a análise e o entendimento do comportamento de sistemas

dinâmicos.

Apesar da possibilidade de observação dos gráficos na própria plataforma Arduino, um código para este fim foi desenvolvido no ambiente de desenvolvimento e linguagem de programação gráfica NI LabVIEW (figura 6.8).

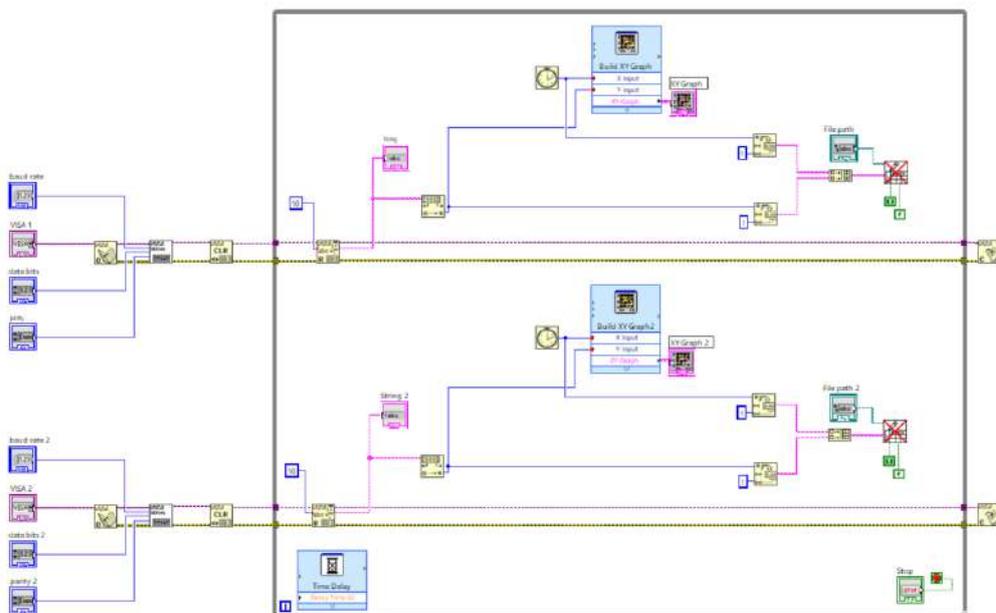
O NI LabVIEW (Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench) é uma linguagem de programação gráfica desenvolvida pela National Instruments. Utilizando a linguagem gráfica G, o LabVIEW permite a criação de diagramas de blocos, tornando o desenvolvimento mais intuitivo. Sua interface visual facilita a implementação de instrumentos virtuais, que simulam equipamentos como osciloscópios e multímetros, além de possibilitar a automação de processos e testes em tempo real (BARBOSA, 2017).

O programa, assim como a ferramenta serial plotter do Arduino, também permite a apresentação gráfica dos resultados em tempo real de funcionamento do mecanismo, com a vantagem de ser uma ferramenta que permite criar interfaces customizáveis, incluindo botões, indicadores digitais, controles deslizantes, entre outros componentes interativos.

Além dessas vantagens, o Labview ainda permite a conexão de vários dispositivos simultaneamente via diferentes interfaces (USB, Ethernet, Serial, etc.); permite salvar dados em arquivos como .csv, .txt ou bancos de dados automaticamente para análises posteriores; consegue gerenciar grandes volumes de dados de forma eficiente, permitindo o processamento e a visualização em alta frequência; facilita a geração de relatórios automatizados e detalhados, incluindo gráficos, tabelas e descrições, em formatos como PDF ou Word, entre várias outras possibilidades.

A figura 6.8 mostra o diagrama de blocos do código desenvolvido no LabVIEW para a visualização dos gráficos. Essa configuração organiza os elementos de um programa em blocos funcionais e conexões visuais que representam o fluxo de dados entre esses blocos.

Figura 6.8 – Diagrama de blocos em LabVIEW



LabVIEW™ Evaluation Software

Fonte: Autoria própria

A organização estrutural do diagrama de blocos acima conta com três entradas (Baud Rate, Data Bits e Parity). Essas entradas definem os parâmetros de comunicação serial (taxa de transmissão, número de bits de dados e verificação de paridade) para conectar o dispositivo externo ao sistema LabVIEW. São essenciais para garantir que o software se comunique corretamente com o hardware. Para gerenciar a comunicação serial com os dispositivos, é utilizada a biblioteca Virtual Instrument Software Architecture (VISA). Ela configura a porta serial para iniciar a troca de dados.

Os dados recebidos da comunicação serial são armazenados como strings, sequências de caracteres ASCII (American Standard Code for Information Interchange) que podem ser exibidas ou não. As strings são convertidas em números, permitindo que os dados sejam tratados como entradas para cálculos ou gráficos.

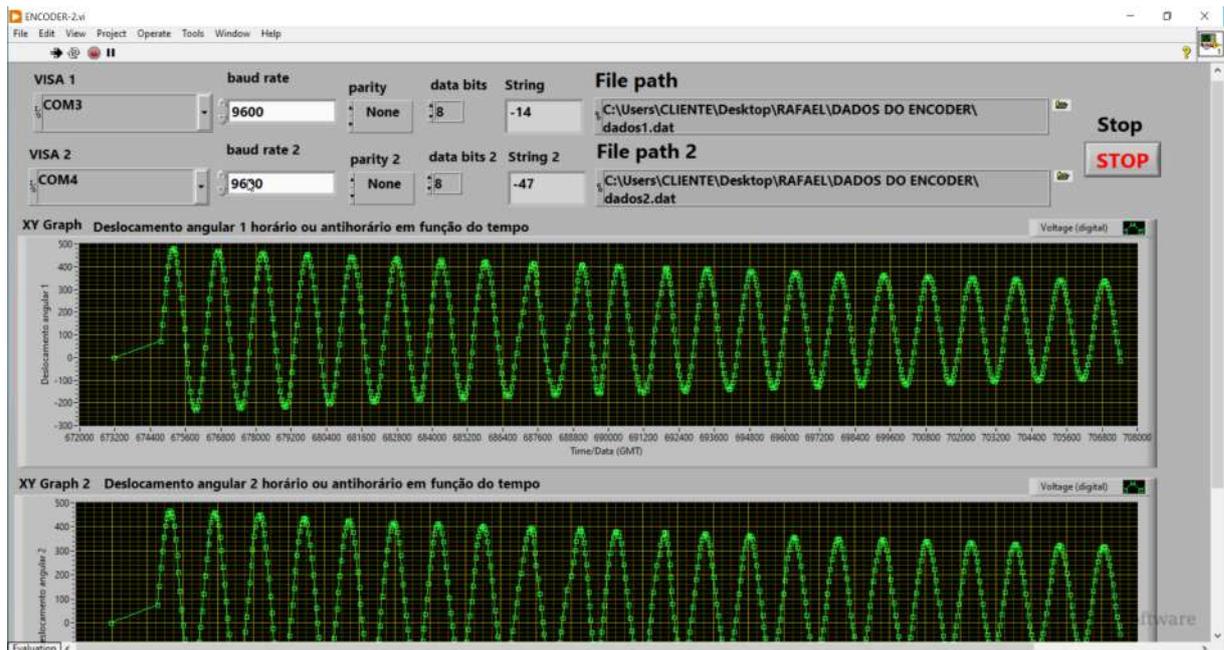
Após essa conversão, o controle gráfico XY (*Build XY Graph*) recebe os dados, agora numéricos, e os organiza para gerar gráficos XY em tempo real. A entrada *X Input* representa o eixo X (geralmente uma variável independente, como o tempo nesse caso), enquanto *Y Input* corresponde ao eixo Y (a variável dependente medida ou simulada, nesse caso, o deslocamento angular). O bloco *XY Graph* representa os gráficos finais que mostram a relação entre as variáveis monitoradas (tempo e deslocamento angular).

Quanto ao armazenamento de dados, o bloco *File Path* define o caminho do arquivo onde os dados recebidos serão armazenados. É utilizado para salvar os dados em formato texto ou planilha, permitindo análises posteriores. Já o *Write to Text File* salva os dados recebidos no formato de texto. Isso é útil para registrar os resultados da aquisição de dados em tempo real.

O laço *While* é usado para manter o programa em execução enquanto a condição de parada (botão *Stop*) não for acionada. Ele garante a continuidade da leitura de dados e atualização dos gráficos em tempo real. O *Time Delay* garante que a leitura dos dados ocorra em intervalos regulares, evitando sobrecarga no sistema. O tempo de atraso entre cada ciclo do laço *While* é configurado para sincronizar a coleta de dados. Por fim, o botão de parada *Stop* permite ao usuário interromper a execução do programa de forma controlada. Ao pressionar este botão, o laço *While* termina e o programa finaliza sua execução.

A figura 6.9 mostra a interface do programa, onde é possível visualizar os elementos descritos acima, bem como os gráficos gerados do movimento oscilatório dos dois pêndulos simples acoplados pela mola de pequena constante elástica.

Figura 6.9 – Interface do Labview



Fonte: Autoria própria

7 RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos com a aplicação do produto educacional baseado no sistema de dois pêndulos simples acoplados por uma mola de pequena constante elástica. A aplicação abordou conceitos fundamentais de Física, como energia mecânica, forças restauradoras e movimentos oscilatórios, e foi conduzida em seis encontros, cada um correspondendo a duas aulas de 50 minutos, na disciplina de Aprofundamento em Ciências Exatas, Tecnológicas e da Terra.

A análise dos resultados inclui observações realizadas durante as atividades teóricas e práticas, discussões promovidas em sala de aula e as produções dos estudantes ao longo do processo. Caracteriza-se, assim, como uma avaliação qualitativa, em que todo o processo é considerado essencial, e não apenas os resultados finais.

Na etapa prática, em que a Sequência de Ensino Investigativa (SEI) foi aplicada explicitamente, destacaram-se momentos como a formulação de hipóteses, a construção de planos de ação e a análise dos dados obtidos. Essas etapas culminaram na socialização dos aprendizados, realizada na última etapa da sequência.

Os resultados também incluem relatos qualitativos dos alunos, que evidenciam a evolução conceitual e o desenvolvimento de competências investigativas, como o uso de terminologia técnica e a aplicação do raciocínio científico para resolver os problemas propostos. A manipulação do aparato experimental, em especial, revelou-se central para a consolidação do aprendizado e para o aumento do interesse dos alunos pela disciplina.

Essas observações foram enriquecidas pelas reflexões dos estudantes sobre as relações entre teoria e prática, o que reforça a relevância da metodologia investigativa como ferramenta para potencializar o aprendizado de conceitos de Física no Ensino Médio.

As seções seguintes deste capítulo apresentam, de forma contextualizada, o desenrolar dos encontros, os assuntos abordados em cada um deles e as análises e impressões constatadas ao longo do processo.

7.1 Aplicação do produto

Tendo como base a Sequência de Ensino Investigativo (SEI), discutida no capítulo 3, a metodologia utilizada na aplicação desse trabalho pode ser dividida em duas fases: discussões sobre os conteúdos que fundamentam o aparato experimental numa abordagem expositiva, fomentada por demonstrações simples e práticas, tendo como centro de interesse o aluno; e investigação prática do aparato, com manuseio, interpretação e formulação de hipóteses por parte dos estudantes, baseados no que foi visto na introdução teórica.

Reconhece-se que a introdução de práticas investigativas requer, em muitos casos, uma etapa inicial que assegure que os participantes dominem os conceitos e as ferramentas básicas necessárias para a realização de investigações mais profundas. Dada a complexidade do sistema experimental escolhido — dois pêndulos simples acoplados por uma mola — e os conteúdos a ele associados, optou-se por estruturar os primeiros cinco encontros de forma expositiva e dialogada, com foco em apresentar os conceitos teóricos e as ferramentas fundamentais. Essa etapa foi planejada para promover uma base sólida de conhecimento,

facilitando a transição dos estudantes para a etapa de investigação prática.

No sexto encontro, foi desenvolvida uma atividade investigativa que contemplou todas as etapas da metodologia SEI (problematização, construção de hipóteses, planejamento experimental, coleta e análise de dados e discussão de resultados). Essa abordagem permitiu que os estudantes aplicassem os conhecimentos adquiridos nos encontros anteriores de forma autônoma e crítica, integrando os princípios da metodologia investigativa ao desenvolvimento prático.

Ao estruturar a aplicação dessa maneira, buscou-se equilibrar o aprofundamento conceitual e o desenvolvimento das habilidades investigativas, mantendo a coerência com os objetivos da metodologia SEI e maximizando o potencial de aprendizado dos estudantes.

A tabela a seguir (tabela 7.1) mostra a estruturação dos encontros bem como as atividades desenvolvidas em cada um deles. A organização dos conteúdos desenvolvidos em cada encontro pode ser vista no apêndice A desta dissertação.

Encontro	Objetivo	Atividades	Resultado Esperado
1º	Identificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre os conceitos básicos da Física.	<ul style="list-style-type: none"> - Aplicação de um questionário diagnóstico. - Discussão inicial sobre a percepção da Física no cotidiano. 	Mapeamento dos conhecimentos prévios e principais dificuldades.
2º	Introduzir os fundamentos da Física e situar seu papel na compreensão de fenômenos naturais.	<ul style="list-style-type: none"> - Apresentação teórica: - Objeto de estudo da Física. - Conceitos de sistemas físicos. - Importância da Física Newtoniana. 	Compreensão inicial dos fundamentos da Física como ciência.
3º	Explorar os conceitos de energia cinética, potencial e conservação da energia mecânica.	<ul style="list-style-type: none"> - Demonstrações práticas simples. - Vídeos curtos e simulações sobre transformação de energia. - Discussão sobre aplicações em sistemas reais. 	Relacionar os conceitos de energia a fenômenos observáveis e compreendê-los.
4º	Conceituar força restauradora e explorar sua relação com movimentos oscilatórios.	<ul style="list-style-type: none"> - Introdução à Lei de Hooke e à força elástica com experimentos simples. - Discussão sobre força restauradora. - Representação gráfica. 	Entendimento da força elástica e sua aplicação em sistemas físicos.
5º	Abordar o MHS e aplicar os conceitos ao pêndulo simples.	<ul style="list-style-type: none"> - Apresentação dos conceitos de MHS, amplitude, frequência e período. - Experimento prático com pêndulos. - Discussão sobre aplicações práticas. 	Capacidade de relacionar os conceitos de MHS e pêndulo simples à prática experimental.
6º	Aplicar os conceitos de energia mecânica, forças restauradoras e movimentos oscilatórios.	<ul style="list-style-type: none"> - Aplicação do sistema experimental; - Problemas investigativos; - Planejamento e execução de experimentos pelos alunos. - Discussão. 	Desenvolvimento do raciocínio científico, integração dos conceitos e apresentação de conclusões.

Tabela 7.1 – Sequência de aulas

7.2 Local de aplicação

A aplicação do produto educacional ocorreu no Centro de Ensino Governador Archer (CEGA), escola localizada na rua Cel. Manoel Bandeira, 847 - Centro, 65900-010, Imperatriz - MA.

Imperatriz é a segunda maior cidade do Maranhão, com uma área de aproximadamente 1 370 km^2 , localizada a 623 km da capital São Luís e conhecida por sua importância econômica e cultural na região tocantina. Situada às margens do rio Tocantins, tem uma população estimada de 273 mil habitantes (IBGE, 2022), destaca-se por sua conexão com a região amazônica e com outros estados, como Tocantins e Pará. A cidade é conhecida como a “Princesa do Tocantins” e funciona como um polo regional, sendo fundamental para o agronegócio, o comércio e o setor de serviços. Além disso, Imperatriz conta com instituições de ensino, cultura e infraestrutura que atendem não apenas à população local, mas também a municípios vizinhos, consolidando sua importância no desenvolvimento regional. A figura 7.1 mostra uma vista aérea da cidade.

Figura 7.1 – Cidade de Imperatriz - MA



Fonte: Prefeitura de Imperatriz

Nesse cenário, o Centro de Ensino Governador Archer se destaca como uma escola que atende a uma ampla diversidade de estudantes, incluindo jovens de áreas urbanas e rurais. Por estar inserida em um contexto socioeconômico variado, a escola enfrenta desafios comuns às instituições públicas, como a necessidade de recursos materiais e tecnológicos, além de manter a motivação e o engajamento dos alunos.

Apesar das dificuldades enfrentadas, a escola é uma instituição de ensino público inclusiva que desempenha um papel significativo na educação de jovens de Imperatriz e cidades vizinhas. Como parte da rede estadual de ensino, a escola busca oferecer uma formação integral aos estudantes, promovendo não apenas o aprendizado acadêmico, mas também o desenvolvimento de competências sociais e cidadãs.

Para a aplicação foi escolhida a turma de 2º ano de Ciências Exatas, Tecnológicas e da Terra do turno matutino da escola. É uma turma heterogênea, composta por 38 estudantes que possuem interesse em seguir carreiras relacionadas a essas Ciências citadas.

Figura 7.2 – Centro de Ensino Governador Archer, Imeratriz - MA



Fonte: Portal do Guigui

A aplicação foi planejada para que ocorressem nos seis encontros descritos na tabela 7.2, cada um correspondendo a duas aulas. A descrição de cada encontro pode ser observada a seguir:

7.2.1 Primeiro encontro - aulas 1 e 2

O primeiro encontro com a turma foi dedicado à aplicação de um questionário (ver apêndice A), devido à necessidade de identificar os conhecimentos prévios dos alunos. Essa estratégia não só permitiu inferir sobre os saberes individuais, mas também identificar os pontos que mais necessitavam de suporte e aprimoramento. A partir dessas informações, foi possível planejar os encontros posteriores de forma a atender às especificidades da turma de maneira mais ajustada.

O questionário era composto por questões subjetivas, onde os alunos puderam expressar suas ideias contextualizadas. O objetivo não era mensurar quantitativamente suas respostas, mas obter informações que demonstrassem o grau de compreensão dos assuntos que seriam desenvolvidos nos próximos encontros. Portanto, não havia necessariamente respostas certas ou erradas. Essas razões, assim como todo o contexto da aplicação, foram esclarecidas aos estudantes.

As perguntas foram elaboradas de forma clara e objetiva, para evitar dúvidas interpretativas. Os alunos responderam individualmente, sem consulta, em poucas linhas, as questões propostas. Entre as perguntas, havia algumas que poderiam ser respondidas

apenas com base no conhecimento de mundo e vivências, enquanto outras buscavam ressaltar conhecimentos adquiridos em anos anteriores.

A execução desse recurso metodológico foi de fundamental importância não apenas para entender as habilidades já estabelecidas nos estudantes, mas também para esboçar um perfil geral da turma, identificando suas potencialidades e deficiências. A partir dessa identificação, todo o plano para os demais encontros precisou ser adaptado para se adequar à realidade observada.

7.2.1.1 Impressões e análises do primeiro encontro

A abordagem inicial da sequência de aulas com um questionário constituído por questões subjetivas evidenciou preocupações e receios. Apesar da curiosidade, a insegurança se manifestava em falas como “não vou saber nada” ou “poderia ser de marcar, né?” Entretanto, no decorrer do processo, ao entenderem que o objetivo não era mensurar seus conhecimentos científicos, mas sim conhecer suas opiniões ou apropriações anteriores de conhecimentos relacionados, os alunos, enfim, sentiram-se mais confortáveis.

Apesar das questões apresentadas serem bastante claras, foi observado durante a aplicação muitas dúvidas interpretativas, demonstrando certa insegurança com o que estava sendo indagado e possíveis respostas descontextualizadas. Não foram raras as vezes em que algum aluno perguntou ou pediu para explicar o que a questão desejava inferir.

Na coleta das respostas dos estudantes, foram observadas que muitos deles contextualizavam intuitivamente muitos dos conceitos requeridos. Na indagação sobre sistemas físicos, por exemplo, muitos responderam com base apenas nos termos utilizados, mas que não deixavam de estar, mesmo que de forma primitiva e superficial, corretos. Essa constatação mostra que conhecimentos empíricos podem ser constituídos sem grandes interferências e que podem representar contribuição significativa aos conhecimentos científicos a serem desenvolvidos.

A diversidade das respostas também é uma evidência bastante interessante, uma vez que salienta os mais diferentes contextos e experiências vivenciadas pelos alunos. A natureza das respostas pode representar que os contextos inseridos podem interferir não apenas em concepções que relacionam tomadas de atitudes e comportamentos, mas também na forma em que se enxerga o mundo e seu funcionamento de forma geral.

7.2.2 Segundo encontro - aulas 3 e 4

Tópicos abordados: Objeto de estudo da Física, Sistemas Físicos e Física Newtoniana.

A partir do segundo encontro, foram abordados os conteúdos considerados necessários para o entendimento do aparato experimental. Inicialmente, priorizou-se o estudo dos Objetos de Estudo da Física, Sistemas Físicos e Física Newtoniana, assuntos introdutórios que fundamentam o que será estudado posteriormente.

Destacou-se o comprometimento com os saberes científicos na tentativa de explicar fenômenos observáveis e como a Física contribui nesse sentido, sendo uma ciência que explora a matéria, a energia e suas interações do micro ao macroscópico.

Como forma de compreensão dos eventos, a observação a partir de sistemas físicos, sejam eles abertos, fechados ou isolados, é uma abordagem didática que facilita a visualização e reduz as limitações abstrativas. Essa diferenciação foi evidenciada nesse segundo momento a partir de exemplos generalizados, como um carro em movimento, uma bola sendo lançada ou em um processo de transferência de calor por convecção.

As Leis de Newton também foram revisitadas nesse encontro. Apesar de ser um conteúdo que os estudantes já possuem certo conhecimento, fez-se necessário retomar os conceitos, as formulações e as implicações dessas três leis fundamentais ao estudo da Dinâmica. Na contextualização, foram utilizados exemplos visuais como vídeos e simulações computacionais, além de experimentos mentais com situações cotidianas e da própria sala de aula.

Como forma de verificação de aprendizagem, os estudantes foram estimulados a resolver problemas que envolviam os tópicos abordados. Essa situação permitiu a discussão em grupos, o esclarecimento de dúvidas e intervenções nos conceitos assimilados erroneamente.

7.2.2.1 Impressões e análises do segundo encontro

O segundo encontro trouxe conteúdos sistematizados, o que colocou os estudantes em certa zona de conforto, uma vez que conseguiam imaginar as sequências e os rumos que a aula tomaria. Os alunos estavam mais engajados em comparação ao encontro anterior e isso foi refletido em uma participação massiva da turma, seja ao responder perguntas simples durante a explanação dos conceitos ou nas indagações de suas dúvidas que surgiam no processo.

Ao tratar dos objetos de estudo da Física, o que ficou bastante perceptível foi a visão ainda bastante limitada da abrangência dessa ciência. Muitos dos estudantes a associavam basicamente aos cálculos ou à memorização de fórmulas. Apesar da clara consciência de que essa aula não poderia ser responsável por elucidar todas essas concepções errôneas, foi um momento oportuno de esclarecimento das funções da Física socialmente e de ampliar o interesse de alguns estudantes que não manifestavam empolgação graças a essa percepção, que muitas vezes pode ser limitante e desestimulante.

As associações com a vida cotidiana também foram um ponto alto desse encontro. A exemplificação de sistemas físicos, por exemplo, funcionou como estímulos para que os estudantes citassem seus próprios exemplos, estes baseados em seus contextos geográficos e sociais. Esse momento participativo e de exemplificações também é visualmente benéfico a discussões entre alunos sobre ser realmente um exemplo aplicável àquela definição ou poderia ser refutado ou ainda remanejado para uma situação diferente.

Quando abordado assuntos que os alunos claramente haviam vivenciado anteriormente, a experiência é diferente, foi o que aconteceu quando as leis de Newton foram enunciadas. Os alunos recorrem à memória pela verbalização correta dos termos. Deixa de ser algo que eles apenas estão descobrindo e que, portanto, suas respostas possuem um tom de dúvidas e passa a ser um apanhado de termos, muitas vezes coerentes, de experiências científicas experimentadas anteriormente. Nessa etapa, os alunos já evidenciavam com clareza conceitos relacionados a repouso e movimento, força, aceleração, entre outros.

7.2.3 Terceiro encontro - aulas 5 e 6

Tópicos abordados: Energia mecânica: Cinética e Potencial e Conservação da Energia Mecânica.

Continuando a abordagem dos conteúdos, o terceiro encontro foi dedicado aos conceitos relacionados à energia mecânica e à conservação da energia mecânica. Esse assunto constitui a base principal do aparato experimental, portanto a integração dele à aplicação não poderia ser dispensada.

O enfoque inicial foi na construção conceitual de termos como energia mecânica, energia cinética e energia potencial, na relação matemática entre essas três formas de energia e na atuação delas em sistemas simples do cotidiano. A compreensão dos princípios que relacionam o movimento à energia cinética e a posição à energia potencial foi fundamental para o entendimento do tópico subsequente, quando foi abordada a conservação da energia mecânica.

Na segunda parte da aula, os estudantes foram estimulados a observar situações em vídeos e simulações, onde puderam identificar e discutir as formas de energia presentes. Além disso, observaram como essas formas de energia se transformam umas nas outras mantendo a constância na ausência de forças dissipativas. O princípio da conservação de energia mecânica foi então estabelecido.

Para consolidar os conceitos trabalhados, a resolução de situações-problema em pequenos grupos foi priorizada. Foram abordadas diversas circunstâncias com sistemas fechados e isolados. A exposição das ideias em conformidade com o conteúdo proposto contribuiu para uma avaliação positiva da compreensão por parte dos estudantes.

7.2.3.1 *Impressões e análises do terceiro encontro*

O terceiro encontro revelou vários conhecimentos prévios dos estudantes. A abordagem sobre energia mecânica foi importante para desfazer a visão de que energia está exclusivamente relacionada à energia elétrica, como muitos alunos pensavam. Alguns estudantes apontaram outros contextos em que ouviram falar sobre energia, o que gerou uma discussão inicial interessante e estimulante para a introdução da proposta desse encontro.

A energia cinética foi rapidamente associada pelos estudantes aos conceitos de movimento e velocidade. Eles trouxeram exemplos de situações em que identificavam esse tipo de energia, como no movimento de veículos, em esportes e outras ocasiões, mostrando que haviam assimilado bem o conceito. Ao estabelecer a relação de proporcionalidade através da equação, os estudantes foram capazes de realizar comparações em contextos semelhantes e identificar onde havia mais ou menos energia cinética empregada.

Com relação à energia potencial, a maior dificuldade dos estudantes estava em perceber que objetos em repouso também podem possuir energia. O conceito de trabalho foi essencial para desconstruir as ideias dos mais hesitantes. Na exemplificação, foram utilizados objetos ao alcance dos alunos, e a relação entre energia potencial gravitacional e altura foi rapidamente estabelecida. Perguntas como “Quanto mais alto, mais energia o objeto terá?” ou “Se o objeto cair, ele passa a ter energia cinética ou possui as duas ao mesmo tempo?” surgiram durante a abordagem, indicando uma organização cognitiva

eficaz dos conceitos.

Seguindo uma abordagem semelhante, a energia potencial elástica foi rapidamente associada à deformação dos objetos. O termo “elástico” contribuiu de forma eficaz para essa percepção. Alguns estudantes colaboraram com exemplos do cotidiano, como a deformação de uma bola ao ser chutada, entre outros.

A utilização de vídeos e simulações na abordagem da conservação da energia mecânica contribuiu significativamente para o entendimento. Os alunos conseguiram identificar a presença das diferentes formas de energia em cada situação apresentada e suas relações com massa, velocidade ou altura. Além disso, as transformações nas simulações, indicadas por elementos gráficos, permitiram observar as transferências e transformações de energia, despertando curiosidades sobre dispersão de energia, expressas em perguntas como “Por que o objeto não consegue subir até a altura inicial?”. Isso possibilitou a introdução de outros conceitos, como forças dissipativas, enriquecendo as discussões durante a aula.

7.2.4 Quarto encontro - aulas 7 e 8

Tópicos abordados: Força Restauradora – Força Elástica e Movimentos Oscilatórios.

O quarto encontro com a turma abordou os movimentos oscilatórios e a ação de forças restauradoras, com foco predominante na força elástica. De forma análoga aos encontros anteriores, a abordagem iniciou-se com as definições dos termos principais e seguiu com a explanação dos fenômenos sugeridos.

A compreensão da força restauradora como uma ação capaz de conduzir o corpo à posição de equilíbrio ocorreu naturalmente. Já a formulação matemática da Lei de Hooke, que relaciona a força restauradora com a deformação do material, demandou maior atenção, principalmente quando se incluiu direção e sentido. A exemplificação através de imagens foi fundamental para a consolidação do assunto.

Os movimentos oscilatórios como consequência da ação de forças restauradoras foram o tópico que deu continuidade à discussão. A abordagem partiu de exemplos clássicos, como o sistema massa-mola, as oscilações harmônicas em geral e o pêndulo simples, antecipando o que seria visto no próximo encontro. Nesta aula, foram também evidenciadas as equações dos movimentos oscilatórios, apresentando elementos como amplitude, período e frequência.

Na síntese dos assuntos trabalhados, os alunos foram instruídos a observar padrões de oscilações e a identificar cada um dos elementos. A partir daí, foi possível justificar as modificações desses padrões quando se alteram alguns desses elementos.

7.2.4.1 *Impressões e análises do quarto encontro*

O quarto encontro foi dedicado à abordagem dos tópicos Força Restauradora – Força Elástica e Movimentos Oscilatórios. Assim como nos encontros anteriores, os alunos desconheciam os termos técnicos, mas, quando esclarecidos, exemplificados e demonstrados a partir de situações cotidianas, muitas dúvidas foram sanadas.

As ideias iniciais associadas ao termo “restaurador” giravam em torno de consertar

ou refazer algo. Alguns alunos já conseguiam relacioná-lo a “voltar a uma posição anterior” ou “força de retorno”, mas a ideia de posição de equilíbrio ainda não estava completamente consolidada em suas cognições para o contexto proposto. O exemplo clássico da mola comprimida ou esticada para ilustrar a força restauradora foi útil, pois permitiu uma visualização prática e acessível, além de ser uma situação comum em suas vivências. A relação entre a mola “querendo voltar à posição inicial” e o termo força restauradora foi, então, finalmente estabelecida. Alguns alunos mencionaram a semelhança do fenômeno com um elástico esticado, e rapidamente outros alunos apontaram situações semelhantes.

Ao restringir o foco à força elástica e sua formalização pela Lei de Hooke, alguns alunos perceberam certa semelhança com a energia potencial elástica. Nesse ponto, o principal questionamento surgiu em relação ao sentido da força. A maior dificuldade foi compreender a relação entre o deslocamento em um sentido e a força atuando no sentido oposto. A retomada do exemplo da mola foi crucial para auxiliar nessa assimilação. Surgiram também perguntas sobre como a constante elástica influencia a deformação, o que foi importante para a compreensão da proporcionalidade entre os elementos da Lei de Hooke.

Em relação aos movimentos oscilatórios, a compreensão foi bastante facilitada pelos tópicos anteriores. A razão pela qual o objeto oscila em torno de uma posição de equilíbrio foi imediatamente relacionada à força restauradora. As situações constantemente citadas nesse contexto incluíram o relógio de pêndulo, balanços em parquinhos e brinquedos com molas. A partir dessas concepções iniciais, foi possível estimular os conceitos subsequentes. A morfologia das palavras foi uma ferramenta que os estudantes usaram para relacionar período ao tempo de uma oscilação e frequência à quantidade de oscilações em um tempo determinado.

7.2.5 Quinto encontro - aulas 9 e 10

Tópicos abordados: Movimento Harmônico Simples e Pêndulo Simples

No penúltimo encontro com a turma, foi dada continuidade ao assunto do encontro anterior, priorizando, nesse momento, os temas relacionados ao Movimento Harmônico Simples (MHS) e ao Pêndulo Simples, que são assuntos mais específicos dentro da abrangência dos movimentos oscilatórios.

Inicialmente, a contextualização ocorreu por meio de uma revisão do encontro anterior, revisitando os conceitos de amplitude, período e frequência. A progressão da abordagem incorporou esses conceitos naturalmente ao Movimento Harmônico Simples, de modo que até mesmo as equações matemáticas que descrevem o MHS não parecessem desconectadas do que foi visto anteriormente.

Para simplificar ou ampliar a capacidade abstrativa dos estudantes, foram utilizados modelos didáticos, como massas presas a molas, para exemplificar as características comportamentais do MHS. A relação entre posição, velocidade e aceleração ao longo do tempo também foi abordada neste encontro. Nesse caso, a observação de gráficos que relacionam essas grandezas foi utilizada para salientar melhor o comportamento de sistemas que seguem o MHS.

Quanto ao pêndulo simples, foi utilizado um modelo simples de uma massa presa a um fio para demonstrar elementos como o comprimento do pêndulo, a massa, a amplitude,

a frequência e o período, e a influência da gravidade em seu funcionamento.

As equações do movimento oscilatório para o Pêndulo Simples serviram como base para a abordagem prática promovida ao final desse encontro. A turma foi inserida em contextos nos quais tiveram que identificar sistemas com comportamento periódico de pêndulo e aplicar seus conhecimentos recém-adquiridos na resolução de problemas.

7.2.5.1 Impressões e análises do quinto encontro

O quinto encontro trouxe a temática do Pêndulo Simples e do Movimento Harmônico Simples (MHS). Por se tratar de situações específicas onde se observam oscilações, os estudantes demonstraram maior familiaridade com os conceitos, relacionando-os com as abordagens dos encontros anteriores. No entanto, devido à natureza abstrata de alguns dos fenômenos relacionados ao MHS e à formalização matemática em determinados enfoques, foi perceptível certa inibição. Aos poucos, com a utilização de demonstrações práticas e visuais, a desmistificação do tema foi sendo alcançada, e a participação da turma foi satisfatória.

Ao abordar o movimento harmônico simples, a grande questão levantada foi a diferenciação desse movimento oscilatório específico de outras situações oscilatórias. À medida que os estudantes foram apresentados às características e singularidades do MHS, essa dúvida foi, gradualmente, esclarecida. As reações dos estudantes ao identificarem a presença da força restauradora proporcional ao deslocamento foram bastante interessantes, pois mostraram que os conceitos trabalhados anteriormente haviam sido consolidados. Algumas perguntas relacionadas à posição, velocidade e aceleração, e suas influências no movimento oscilatório, também surgiram. Novamente, o uso das simulações foi bastante útil para esclarecer as dúvidas dos alunos.

Em relação ao pêndulo simples, muitos estudantes demonstraram noções prévias de seu funcionamento, o que facilitou a discussão inicial. Esse conhecimento, associado aos conceitos desenvolvidos nos encontros anteriores, contribuiu para a compreensão de diversas discussões, como as variações de energia cinética e potencial e a percepção das forças dissipativas, o que levou, de forma natural, à conclusão de que a energia mecânica não se conservaria no modelo prático utilizado em sala para exemplificação. Algumas questões surgiram nesse processo, como: “O que aconteceria se o pêndulo fosse mais longo ou se a massa fosse maior?” ou “Além das forças dissipativas, algo mais afeta a diminuição da amplitude?” O interessante nessa etapa foi que os próprios alunos esclareciam dúvidas uns dos outros, e, com as devidas intervenções e ajustes nos termos utilizados, isso representou uma troca entre pares significativa.

Entre as abordagens matemáticas, uma que chamou atenção, foi a equação do período do pêndulo. Muitos alunos ficaram surpresos, até mesmo céticos, ao verificarem que a equação do período não depende da massa, apenas da aceleração gravitacional e do comprimento do fio. Esse ponto foi importante, pois desmistificou interpretações ou intuições prévias que não foram confirmadas pela experimentação ou pelo formalismo matemático apresentado. Por outro lado, representou uma transformação do conhecimento empírico em conhecimento científico.

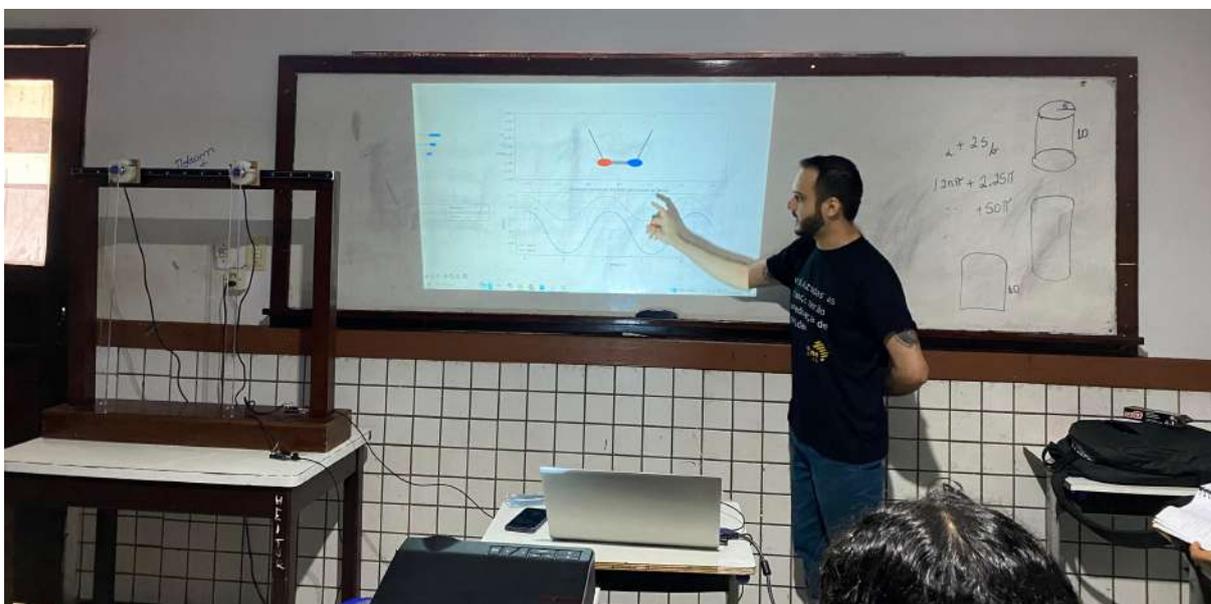
7.2.6 Sexto encontro - aulas 11 e 12

O sexto encontro foi dedicado à aplicação do aparato experimental desenvolvido, composto por pêndulos simples acoplados por uma mola de pequena constante elástica. Essa etapa marcou a concretização da abordagem prática, promovendo a integração entre teoria e experimentação por meio da Sequência de Ensino Investigativo (SEI).

Para a realização dessa etapa, foi desenvolvido um roteiro de execução para garantir que todas as etapas da SEI estivessem bem definidas para os estudantes, promovendo uma melhor organização das ações. O roteiro está disponível no apêndice B1.

A primeira fase da SEI corresponde à apresentação do aparato experimental, sua manipulação e a proposição do problema. Nesse momento, os alunos foram convidados a conhecer o modelo, explorar os componentes constituintes, compreender suas funções e refletir sobre suas aplicações no cotidiano. Durante a apresentação, foram resgatados conceitos previamente trabalhados, como amplitude, comprimento de onda, período, frequência, entre outros, com o objetivo de estabelecer uma conexão clara entre teoria e prática. Essa etapa, com duração de 15 minutos, culminou na proposição dos problemas a serem investigados nas etapas seguintes. A turma foi dividida em seis grupos, e cada equipe ficou responsável por investigar um dos problemas propostos, relacionados à energia mecânica no sistema oscilatório, às forças envolvidas ou aos elementos observados nos padrões oscilatórios. As situações propostas estão detalhadas no Apêndice B2, juntamente com o roteiro de aplicação. A Figura 7.3 ilustra como esse momento foi conduzido.

Figura 7.3 – Etapa 1: Apresentação, manipulação e proposição do problema



Fonte: Autoria própria

A etapa seguinte da SEI concentrou-se na identificação e exploração das hipóteses e previsões dos estudantes. Cada grupo foi solicitado a formular previsões ou hipóteses que pudessem culminar na solução dos problemas propostos, tendo como referência a apresentação e manipulação inicial do aparato. Os integrantes de cada grupo tiveram aproximadamente 20 minutos para organizar suas ideias e propor uma ou mais hipóteses

relacionadas à questão investigada. Na Figura 7.4, é possível visualizar uma das equipes realizando esse procedimento.

Figura 7.4 – Etapa 2: Identificação e exploração das hipóteses



Fonte: Autoria própria

A terceira fase correspondeu à construção e execução de um plano de ação. Nesse momento, os estudantes foram convidados a pensar em estratégias para comprovar ou descartar suas hipóteses. Cada equipe recebeu um modelo de plano de ação (disponível junto ao roteiro de aplicação, no Apêndice B2) contendo campos para preenchimento, como a hipótese a ser testada, variáveis envolvidas, métodos e instrumentos de medida, descrição do procedimento, entre outros. Ainda nessa etapa, cada equipe utilizou o sistema de pêndulos acoplados para executar os planos desenvolvidos. Essa atividade teve duração aproximada de 35 minutos. A Figura 7.5 ilustra como esses procedimentos foram realizados.

Figura 7.5 – Etapa 3: Elaboração e execução dos planos de ação



Fonte: Autoria própria

Na etapa seguinte, os alunos organizaram as informações e analisaram os resultados obtidos durante os testes realizados. Para comprovar ou refutar as hipóteses formuladas, eles compararam os dados experimentais com suas previsões iniciais. Nesse processo, tiveram a oportunidade de refletir sobre os fatores que levaram à confirmação ou divergência dos resultados, permitindo-lhes ajustar suas interpretações e, se necessário, reestruturar os experimentos conduzidos. Na Figura 7.6, é possível observar uma das equipes refletindo sobre os resultados obtidos e comparando-os com suas previsões iniciais.

Figura 7.6 – Etapa 4: Análise dos resultados e revisão das hipóteses



Fonte: Autoria própria

A etapa final foi dedicada à socialização das experiências vivenciadas por cada equipe. Nesse momento, os estudantes apresentaram os resultados de suas investigações, detalhando o problema recebido, as hipóteses formuladas, a organização da prática experimental e as conclusões obtidas. Essa etapa se destacou por promover a interação entre as equipes, fomentando discussões construtivas e o compartilhamento de diferentes perspectivas sobre os experimentos realizados. A imagem 7.7 mostra a concretização dessa fase.

Figura 7.7 – Etapa 5: Discussão e conclusão



Fonte: Autoria própria

7.2.6.1 *Impressões e análises do sexto encontro*

A ausência de laboratório na escola e a redução da carga horária em disciplinas como Física, decorrente da implementação do novo Ensino Médio, dificultam a realização de práticas experimentais em sala de aula. Isso gera prejuízos significativos aos estudantes, reduzindo o interesse por essa área do conhecimento.

No entanto, a atividade prática realizada com o aparato experimental mostrou-se extremamente positiva. A aplicação do sistema de pêndulos acoplados foi muito bem-sucedida, promovendo engajamento e entusiasmo entre os alunos. Um dos aspectos mais destacados foi a consolidação dos conceitos previamente trabalhados, agora de forma mais significativa e concreta.

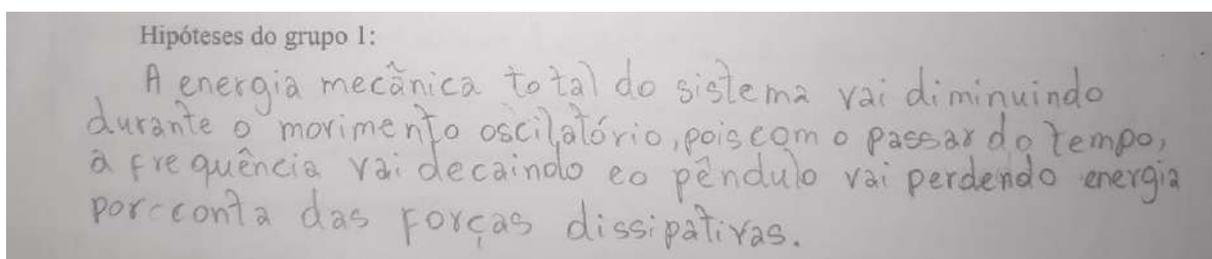
Diversos estudantes relataram que a experiência com os pêndulos foi o ponto alto da

sequência didática, pois conectou a teoria à prática de maneira clara e dinâmica. A turma demonstrou uma evolução notável no raciocínio científico, especialmente na formulação de hipóteses, na interpretação de resultados e na argumentação.

Comparando com o questionário diagnóstico do primeiro encontro, foi perceptível uma mudança de postura e vocabulário. Os estudantes começaram a utilizar termos técnicos, anteriormente ausentes, em contextos adequados.

Na etapa de formulação de hipóteses, o grupo 1 ficou responsável por investigar “como a energia mecânica total do sistema (cinética + potencial) se comporta durante o movimento oscilatório dos pêndulos acoplados?”. A hipótese elaborada pela equipe (figura 7.8) mostra termos como “movimento oscilatório” e “forças dissipativas”, uma clara demonstração da utilização correta, em contextos apropriados. Por outro lado, ainda é perceptível a confusão entre termos, como ocorre em “a frequência vai decaindo”, quando se queria falar da redução da amplitude.

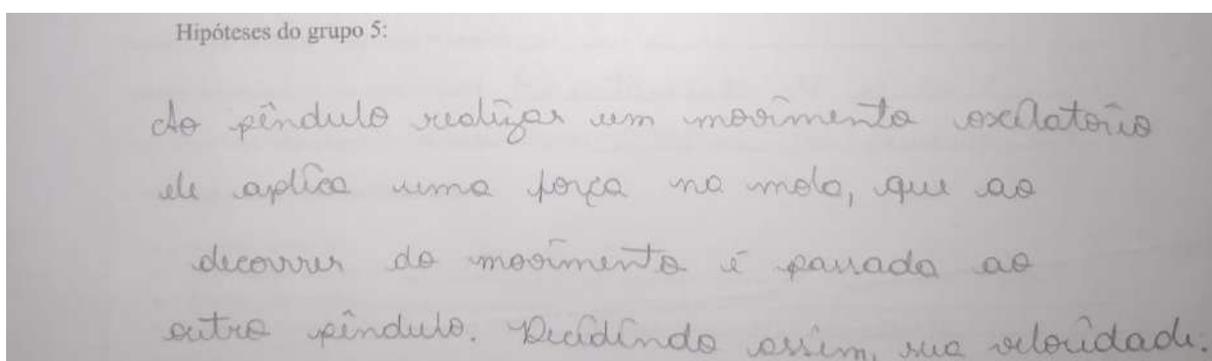
Figura 7.8 – Hipótese formulada pelo grupo 1



Fonte: Autoria própria

O problema investigado pelo grupo 5 abordava a questão: “como o movimento oscilatório de um dos pêndulos influencia o outro, devido ao acoplamento pela mola?”. A figura 7.9 ilustra a hipótese formulada pela equipe. O raciocínio desenvolvido explora os conceitos de força e energia, embora, em algumas ocasiões, haja uma confusão entre eles. No entanto, esses conceitos ainda são aplicados em contextos pertinentes. A descrição precisa de uma situação deve ser valorizada, mesmo que a utilização dos termos não seja completamente correta.

Figura 7.9 – Hipótese formulada pelo grupo 5

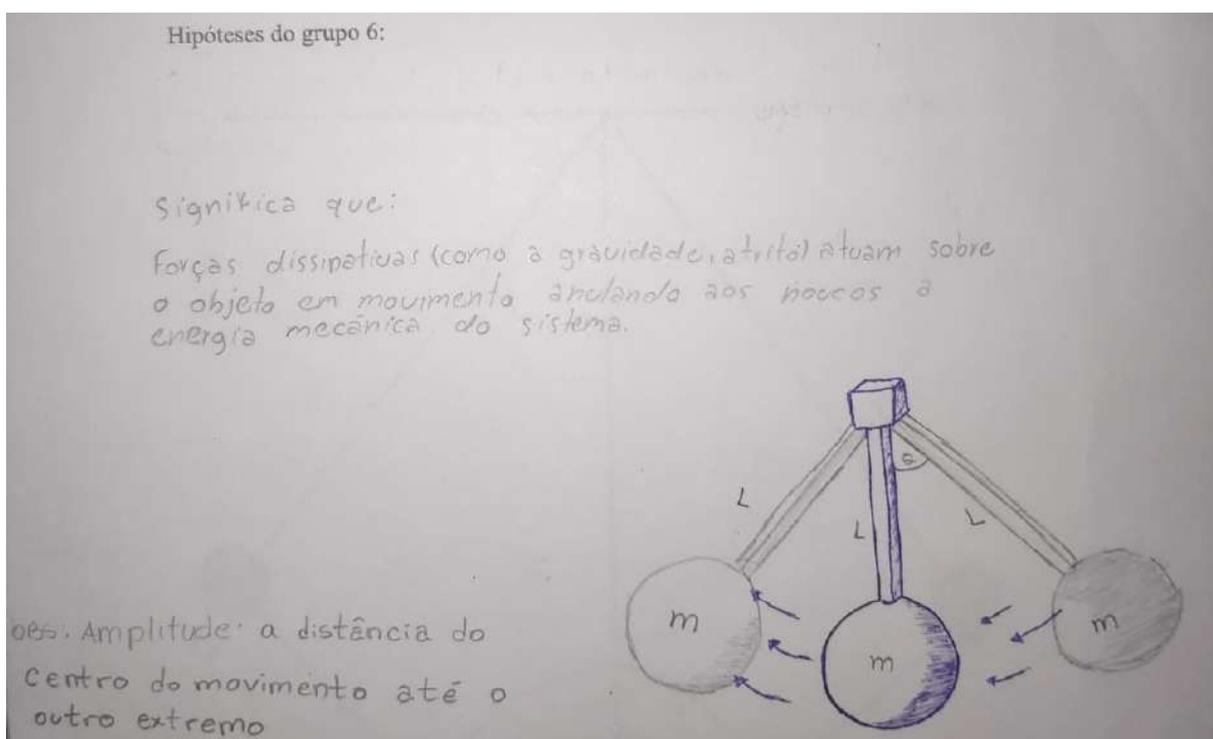


Fonte: Autoria própria

O grupo 6 ficou responsável por investigar: “Como a amplitude de oscilação dos pêndulos varia ao longo do tempo, e o que isso indica sobre a dissipação de

energia no sistema?” Na hipótese formulada, o grupo afirmou que “as forças dissipativas anulam a energia do sistema (figura 7.10).” A utilização correta de conceitos como forças dissipativas, energia e sistema demonstra como a metodologia empregada contribuiu para a aprendizagem, ao permitir que os alunos atuassem de forma autônoma e prática na construção de seu conhecimento.

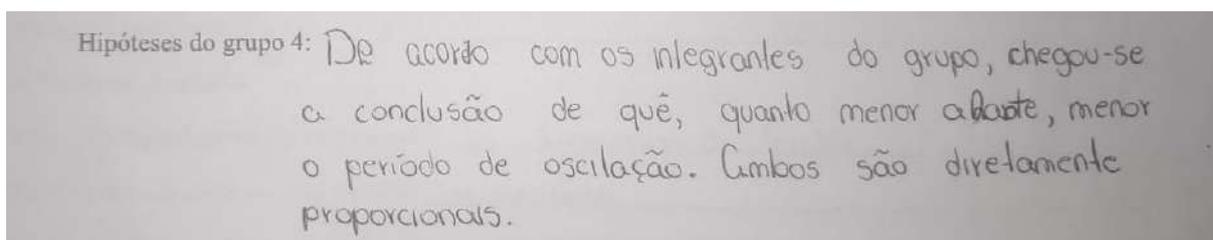
Figura 7.10 – Hipótese formulada pelo grupo 6



Fonte: Autoria própria

Já o grupo 4 investigou: “de que forma o comprimento das hastes dos pêndulos influencia o período de oscilação do sistema?” Em sua hipótese, declararam que “quanto menor a haste, menor o período de oscilação. Ambos são diretamente proporcionais.” Apesar da simplicidade da hipótese, a identificação da relação entre o comprimento da haste e o período mostra que a prática foi significativa. Além disso, a observação da proporcionalidade, mesmo sem uma análise matemática formal, foi um avanço positivo e indicativo de compreensão conceitual. A figura 7.11 mostra a hipótese elaborada pelo grupo.

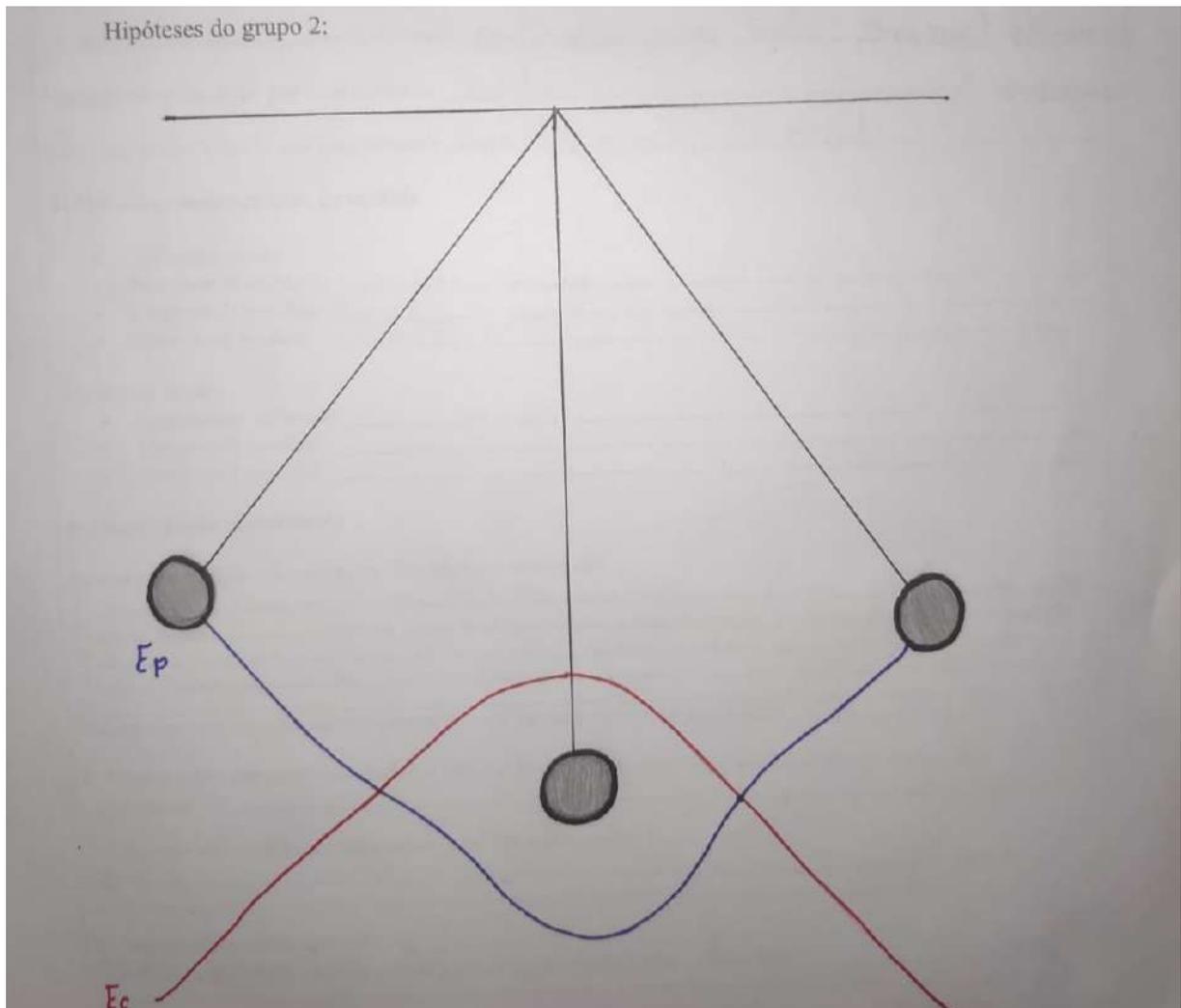
Figura 7.11 – Hipótese formulada pelo grupo 4



Fonte: Autoria própria

Outro exemplo relevante foi o grupo 2, que investigou: “Como as energias cinética e potencial dos pêndulos variam durante o movimento oscilatório?” Na hipótese apresentada, afirmaram que “elas variam de acordo com onde o pêndulo está.” A equipe utilizou uma representação para justificar sua afirmativa, como mostra a figura 7.12. Apesar de certa dificuldade na organização das ideias, a hipótese reflete uma compreensão básica de que a posição ou configuração do sistema está diretamente relacionada com as variações de energia.

Figura 7.12 – Hipótese formulada pelo grupo 2



Fonte: Autoria própria

Esses exemplos ilustram como a prática experimental pode ser uma ferramenta poderosa no processo de ensino-aprendizagem. Ao conectar teoria e prática, os alunos participam ativamente da construção do conhecimento, desenvolvendo habilidades críticas e científicas de forma autônoma e significativa.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo principal promover um ensino de Física inovador e motivador por meio de um produto educacional integrado. Esse produto consiste em um sistema experimental com aquisição automática de dados, acompanhado de um e-book estruturado como manual de construção e aplicação, focando nos conceitos de Mecânica, com ênfase em sistemas não lineares, como os pêndulos acoplados. A proposta fundamenta-se na Sequência de Ensino Investigativo (SEI), difundida no Brasil por Anna Maria Pessoa de Carvalho, priorizando o aprendizado ativo, investigativo e significativo.

A experimentação, enquanto estratégia de ensino, demonstrou-se uma ferramenta eficaz para superar as dificuldades associadas à abstração dos conceitos físicos. Integrada à tecnologia, ela potencializa o ensino ao incorporar sensores, softwares e simulações, enriquecendo o processo de ensino-aprendizagem. Neste trabalho, esses recursos proporcionaram aos estudantes uma abordagem interativa e visual para explorar fenômenos físicos, conectando teoria e prática de forma concreta e significativa.

O planejamento detalhado das etapas e a organização das ações durante a aplicação experimental evidenciaram impactos positivos na turma escolhida. A motivação e a curiosidade demonstradas pelos estudantes refletem o desenvolvimento de habilidades científicas essenciais, como observação, organização de ideias para formulação de hipóteses, análise de dados e expressão de conclusões. Esses avanços validaram a eficácia da metodologia empregada.

Embora restrições de infraestrutura e a necessidade de capacitação docente no uso de tecnologias sejam desafios recorrentes, o trabalho demonstrou que é possível integrar práticas experimentais ao ensino de Física em contextos adversos. A adoção de recursos de baixo custo e de metodologias bem estruturadas mostrou-se uma solução viável para proporcionar uma aprendizagem mais dinâmica e prática, beneficiando especialmente escolas públicas. Essa abordagem, além de fomentar o interesse dos estudantes, pode ser replicada em outras áreas do conhecimento, ampliando seu alcance pedagógico.

Conclui-se que o produto educacional desenvolvido tem grande potencial como ferramenta de ensino eficaz, tanto em laboratórios escolares quanto em salas de aula. Ele promove o aprendizado ativo e incentiva o desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo. A experimentação científica e didática continua sendo um pilar essencial para a construção do conhecimento em Ciências, e iniciativas como esta reforçam a necessidade de investir em abordagens pedagógicas inovadoras para melhorar a qualidade do ensino.

Como continuidade das pesquisas, recomenda-se a aplicação do produto em diferentes contextos educacionais, bem como a realização de estudos que avaliem sua efetividade a longo prazo. Além disso, sugere-se a criação de programas de formação continuada para capacitar professores no uso de tecnologias aplicadas ao ensino experimental. Espera-se que esta iniciativa inspire futuras pesquisas e contribuições destinadas à melhoria do ensino de Física e demais disciplinas científicas.

REFERÊNCIAS

Artigo de periódicos

AGOSTINI, V. W.; TREVISOL, M. T. C. A EXPERIMENTAÇÃO DIDÁTICA NO ENSINO DE CIÊNCIAS: UMA PROPOSTA CONSTRUTIVISTA PARA A UTILIZAÇÃO DO LABORATÓRIO DIDÁTICO. **Colóquio Internacional de Educação**, v. 2, n. 1, p. 753–762, 2014. Citado 1 vez na página 18.

ARAÚJO, M. S. T. d.; ABIB, M. L. V. d. S. Atividades experimentais no ensino de física: diferentes enfoques, diferentes finalidades. **Revista Brasileira de ensino de física**, SciELO Brasil, v. 25, p. 176–194, 2003. Citado 1 vez na página 18.

BATISTA, J. P. d. C. Sistema de Aquisição de dados, 1990. Citado 1 vez na página 55.

BERBEL, N. A. N. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. **Semina: Ciências sociais e humanas**, v. 32, n. 1, p. 25–40, 2011. Citado 1 vez na página 21.

BISINOTTO, G. A.; CANCIAN, C. G.; DE OLIVEIRA, L. F. G. Memorial do Projeto De Um Dispositivo Mecânico Autocontrolado Por Encoder Óptico e Controlado Remotamente Via Bluetooth. **Mecatrone**, v. 1, n. 1, 2015. Citado 1 vez na página 61.

CAMILLO, J.; MATTOS, C. Educação em ciências ea teoria da atividade cultural-histórica: contribuições para a reflexão sobre tensões na prática educativa. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, SciELO Brasil, v. 16, n. 1, p. 211–230, 2014. Citado 1 vez na página 17.

CARVALHO, A. M. P. de. Fundamentos teóricos e metodológicos do ensino por investigação. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, p. 765–794, 2018. Citado 1 vez na página 24.

CUNHA, F. C. M. et al. Revisitando modos normais de oscilações acopladas com a Teoria Espectral de Grafos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 46, e20240095, 2024. Citado 2 vezes na página 46.

DOEBELIN, E. O.; MANIK, D. N. Measurement systems: application and design, 2007a. Nenhuma citação no texto.

FERRAZ, W.; OLIVEIRA JUNIOR, A. Sistema optico de aquisicao de sinais de velocidade e posicao de maquinas (encoder incremental com quadratura geometrica). **Anais**, 1992. Citado 1 vez na página 61.

FREITAS MADRUGA, Z. E. de; KLUG, D. A função da experimentação no ensino de ciências e matemática: uma análise das concepções de professores. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 5, n. 3, 2015. Citado 1 vez na página 18.

GAZZOLA, F.; JLELI, M.; SAMET, B. A new detailed explanation of the Tacoma collapse and some optimization problems to improve the stability of suspension bridges. **Mathematics in Engineering**, v. 5, n. 2, p. 1–35, 2023. Citado 1 vez na página 29.

GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. **Physical Review Letters**, APS, v. 30, n. 26, p. 1343, 1973. Citado 1 vez na página 32.

INÁCIO, M. J. Sensores e Atuadores. **Faculdade de Ciências do Tocantins**, 2009. Citado 1 vez na página 62.

JÁCOME, S. et al. Visualizando os modos normais de vibração com o computador. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 24, p. 214–220, 2002. Citado 2 vezes na página 47.

JAIME, D. M.; LEONEL, A. A. Uso de simulações: Um estudo sobre potencialidades e desafios apresentados pelas pesquisas da área de ensino de física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 46, e20230309, 2024. Citado 1 vez na página 19.

KITTEL, C.; KROEMER, H. Thermal physics. **American Journal of Physics**, v. 39, n. 7, p. 847, 1971. Citado 1 vez na página 32.

KOETZ, C. D.; CARRO, L. Conversor D/A Delta-Sigma de 8 bits. **Salão de Iniciação Científica (11.: 1999: Porto Alegre). Livro de resumos. Porto Alegre: UFRGS, 1999.**, 1999. Citado 1 vez na página 57.

LEE, J.; BAGHERI, B.; KAO, H.-A. A cyber-physical systems architecture for industry 4.0-based manufacturing systems. **Manufacturing letters**, Elsevier, v. 3, p. 18–23, 2015. Citado 1 vez na página 54.

RODES, G. P.; SILVA, M. d. A. J.; GARCIA, J. F. M. A implementação de uma sequência de ensino investigativa e o repensar da prática docente. **Experiências em Ensino de Ciências**, v. 14, n. 1, p. 353–364, 2019. Citado 1 vez na página 24.

SANTOS CRUZ, C. dos et al. O uso do python na construção de simuladores computacionais: proposições e potencialidades para o ensino de Física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 39, n. 1, p. 204–237, 2022. Citado 1 vez na página 22.

SCOTT, S. K. Oscillations, waves, and chaos in chemical kinetics. **(No Title)**, Oxford University Press, 1994. Citado 1 vez na página 31.

SERRANO, L. et al. Sistemas de aquisição, processamento e armazenamento de dados. **Spmet-Encontro Nacional**, v. 1, n. 1, 2004. Citado 1 vez na página 60.

SILVA, L. da; VEIT, E. A. Uma experiência didática com aquisição automática de dados no laboratório de física do ensino médio. **Experiências em Ensino de Ciências**, v. 1, n. 3, p. 18–32, 2006. Citado 1 vez na página 19.

SILVA, R. O. da; ARAUJO, W. M.; CAVALCANTE, M. M. Visão geral sobre microcontroladores e prototipagem com Arduino. **Tecnologias Em Projeção**, v. 10, n. 1, p. 36–46, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 58, 64.

STRIEDER, R. B.; WATANABE, G. Atividades investigativas na Educação Científica: dimensões e perspectivas em diálogos com o ENCI. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, p. 819–849, 2018. Citado 1 vez na página 18.

VYGOTSKY, L. S. Zona de Desenvolvimento Proximal: Uma abordagem sociocultural ao aprendizado. **The Mind in Society**, Harvard University Press, p. 84–91, 1978. Citado 1 vez na página 24.

Artigo de anais de conferência

MARTINS, N. R.; CORDEIRO, R.; OLIVEIRA LOUREIRO, M. P. de. Um programa em Python para experimentos de Física automatizados com o Arduino. In: ANAIS do XXIII Simpósio Nacional de Ensino de Física. Salvador, Bahia: Organizador do Evento, 2019. P. 1–8. Citado 1 vez na página 21.

PINTO, F. B.; LEÃO, P. A.; S JR, A. C. Posicionador de Antenas Automatizado de Baixo Custo para Medições de Diagramas de Radiação. In: ANAIS do XLI SIMPÓSIO BRASILEIRO DE TELECOMUNICAÇÕES E PROCESSAMENTO DE SINAIS - SBRT 2023, São José dos Campos, São Paulo: [s.n.], 2023. Citado 1 vez na página 22.

SILVA, A. P. da; MACAU, E. E. N. Sincronização de fase em Sistemas de Osciladores Acoplados. In: ANAIS do XII Workshop de Computação Aplicada - WORCAP 2012. São José dos Campos, SP: [s.n.], 2012. Citado 1 vez na página 61.

SILVA, J. L. d. S. et al. Plataforma Arduino integrado ao PLX-DAQ: Análise e aprimoramento de sensores com ênfase no LM35. In: ANAIS do XIV Escola Regional de Computação Bahia, Alagoas e Sergipe (ERBASE). Feira de Santana, Bahia: [s.n.], 2014. Citado 1 vez na página 59.

SOUZA FREITAS, M. de et al. Anemômetro de baixo custo para o ensino de Física: uso do Arduino e Python. In: ANAIS do III CoBICET -Congresso Brasileiro Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia. Evento online: [s.n.], 2022. Citado 1 vez na página 21.

TIRONI, C. R. et al. A aprendizagem significativa no ensino de física moderna e contemporânea. In: ATAS do IX Encontro Nacional de Pesquisas em Educação em Ciências. Águas de Lindóia, Brasil: [s.n.], 2013. Citado 1 vez na página 17.

Dissertação de Mestrado

DIONISIO, G. et al. **Atividade experimental para o estudo dos fundamentos do eletromagnetismo e da corrente elétrica alternada.** 2017. Universidade de Passo Fundo, Instituto de Ciências Exatas e Geociências – ICEG, Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Passo Fundo, RS. Citado 1 vez na página 23.

FETZNER FILHO, G. **Experimentos de baixo custo para o ensino de física em nível médio usando a placa Arduino-UNO.** 2015. Dissertação de mestrado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Física. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física., Porto Alegre, RS. Citado 1 vez na página 22.

FUNK, M. A. **Desenvolvimento de um Condicionador de Sinal para Eletroantennografia.** 2014. Diss. (Mestrado) – Universidade NOVA de Lisboa (Portugal). Citado 1 vez na página 55.

SILVA, D. G. d. et al. **A Utilização da plataforma arduino no processo de aprendizagem da física por meio da abordagem STEAM.** 2021. Dissertação de mestrado – UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS – UEA, ESCOLA NORMAL SUPERIOR – ENS PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO E ENSINO DE CIÊNCIAS MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NA AMAZÔNIA, Manaus, AM. Citado 1 vez na página 22.

VASCONCELLOS, R. D. de. **Projeto de um conversor analógico/digital por aproximações sucessivas de 12 bits**. 2011. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais. Citado 1 vez na página 57.

Livro

ASHCROFT, N. W.; MERMIN, N. D. **Solid State Physics**. New York: Holt, Rinehart e Winston, 1976. Citado 1 vez na página 29.

BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D. **Osciladores Harmônicos Clássicos e Quânticos**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2009. Citado 1 vez na página 61.

FOWLES, G. R.; CASSIDAY, G. L. **Analytical mechanics**. [S.l.]: Cengage Learning Indian Pvt. Ltd., 2016. Citado 1 vez na página 48.

FRENCH, A. P. **Vibrations and waves**. [S.l.]: CRC press, 2017. Citado 1 vez na página 47.

GOLDSTEIN, H.; POOLE JR, C. P.; SAFKO SR, J. L. **Klassische mechanik**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 34, 37, 48.

GROOVER, M. P. **Automation, production systems, and computer-integrated manufacturing**. [S.l.]: Pearson Education India, 2016. Citado 1 vez na página 54.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentals of physics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 17, 30, 40.

KELLERT, S. H. **In the wake of chaos: Unpredictable order in dynamical systems**. [S.l.]: University of Chicago press, 1993. Citado 1 vez na página 17.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Mechanics and electrodynamics**. [S.l.]: Elsevier, 2013. Citado 1 vez na página 48.

MCROBERTS, M. **Arduino Básico-2ª edição: Tudo sobre o popular microcontrolador Arduino**. [S.l.]: Novatec Editora, 2015. Citado 3 vezes na página 59.

MORTIMER, E.; SCOTT, P. **Meaning making in secondary science classrooms**. [S.l.]: McGraw-Hill Education (UK), 2003. Citado 1 vez na página 18.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor**. [S.l.]: Editora Blucher, 2018. v. 2. Citado 1 vez na página 41.

PIAGET, J. **The Origins of Intelligence in Children**. New York: International Universities Press, 1952. Citado 1 vez na página 25.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **The Psychology of the Child**. New York: Basic Books, 1969. Citado 1 vez na página 25.

SEARS, F. W. et al. **Sears and Zemansky's University Physics: With Modern Physics: Technology Update**. [S.l.]: Pearson, 2014. Citado 1 vez na página 31.

SERWAY, R. A.; JEWETT JR, J. W. **Física para cientistas e engenheiros: Eletricidade e Magnetismo**. [S.l.]: Cengage Learning, 2018. Citado 1 vez na página 41.

STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering**. 2nd. Boca Raton, FL: CRC Press, 2018. Citado 1 vez na página 29.

THORNTON, S. T.; MARION, J. **Classical dynamics of particles and systems**. [S.l.]: MTM, 2019. Citado 1 vez na página 67.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros**. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos, 2009. Citado 1 vez na página 37.

YVGOTSKY, L. S. **Thought and Language**. Cambridge, MA: MIT Press, 1962. Tradução do original em russo, publicado em 1934. Citado 1 vez na página 24.

WALKER, J. et al. **Fundamentos de física**. [S.l.]: Editora LTC, Rio de Janeiro, 2016. v. 3. Citado 3 vezes nas páginas 30, 32.

YOUNG, H. D. et al. **Sears e Zemansky física I: mecânica**. [S.l.]: Pearson Addison Wesley, 2003. Citado 2 vezes na página 42.

TCC

ARAUJO, M. Z. B. d. et al. **Projeto controle: protótipo de telerobótica usando Python e Arduino**. 2013. Universidade Estadual do Piauí (UESPI)-Campus Professor Alexandre Alves de ... Citado 1 vez na página 23.

BARBOSA, R. O. **Instrumentação virtual com LabVIEW em laboratório experimental de eletrônica**. 2017. B.S. thesis – Centro universitário UNIVATES, Curso de Engenharia de controle e automação. Citado 1 vez na página 75.

CHAVES, J. M. F. **Atividades experimentais demonstrativas no ensino de Física: panorama a partir de eventos da área**. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) – Universidade Federal do Pampa, Bagé, RS. Citado 1 vez na página 18.

COSTA, E. M. **Desenvolvimento de uma interface gráfica para um emulador de cargas mecânicas para ensaios de motores elétricos**. 2019. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará. Bacharelado em Engenharia Elétrica. Citado 1 vez na página 21.

FELDMAN, M. **Estudo e simulação de um conversor A/D do tipo redistribuição de carga**. 2013. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia - Departamento de Engenharia Elétrica, Porto Alegre, RS. Graduação em Engenharia Elétrica. Citado 1 vez na página 56.

MENDES, E. A. **Usando o Arduino e a linguagem Python no ensino de Física**. 2019. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Ceará. Licenciatura em Física. Citado 1 vez na página 21.

SILVA, V. G. d. **A importância da experimentação no ensino de química e ciências**. 2016. Universidade Estadual Paulista (Unesp). Citado 1 vez na página 17.

TIAGO, L. L. **Projeto de um simulador de atitude com três graus de liberdade**. 2013. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP. Graduação em Engenharia Mecatrônica. Citado 1 vez na página 64.

Tese de doutorado

MELO, P. R. C. et al. **Instrumentação com arduino para o ensino de física–lançamento oblíquo**. 2023. PhD thesis – Universidade Federal do Oeste do Pará. Citado 1 vez na página 22.

Referências online

CARVALHO, A. M. P. d. **Ensino de ciências por investigação: condições para implementação em sala de aula**. [S.l.]: Cengage Learning, 2022. Citado 1 vez na página 25.

DOEBELIN, E. O.; MANIK, D. N. **Measurement systems: application and design**. [S.l.: s.n.], jul. 2007b. Citado 1 vez na página 54.

IBGE. **Imperatriz**. [S.l.: s.n.], 2022. Consultado em 24 de novembro de 2024. Disponível em: <<https://cidades.ibge.gov.br/>>. Acesso em: 3 jul. 2023. Citado 1 vez na página 81.

MARION, J.; THORNTON, S.; ROBINETT, R. **Comparative Review. Classical Dynamics of Particles and Systems**. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2000. Citado 1 vez na página 47.

MORA, J. F. et al. **Dicionário de filosofia**. [S.l.]: São Paulo: Martins Fontes, 2001. Citado 1 vez na página 17.

RIFKIN, J. **The third industrial revolution**. [S.l.]: Palgrave macmillan, 2011. Citado 1 vez na página 54.

URBAN, G. **Jacob Fraden: Handbook of modern sensors: physics, designs, and applications**. [S.l.]: Springer, 2016. Citado 1 vez na página 54.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Slides utilizados na aplicação
do produto



ENCONTRO II



O QUE ESTUDA A FÍSICA?

1. Estuda as propriedades fundamentais da natureza, bem como os fenômenos relacionados à matéria e à energia.
 2. Busca entender os princípios que regem o universo e suas implicações.
 3. Estuda desde minúsculas partículas subatômicas até grandes estruturas cósmicas, desde movimentos simples até fenômenos complexos como a relatividade e a mecânica quântica.
- 5

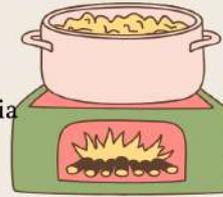
SISTEMAS FÍSICOS

Um sistema físico é uma entidade ou conjunto de objetos que podem ser estudados e analisados com base em princípios e leis da física.



SISTEMA FÍSICO ABERTO

Um sistema físico aberto é aquele que pode trocar tanto matéria quanto energia com sua vizinhança.



SISTEMA FÍSICO FECHADO

Um sistema físico fechado é aquele que permite apenas a troca de energia com sua vizinhança, mas não troca matéria.

SISTEMA FÍSICO ISOLADO

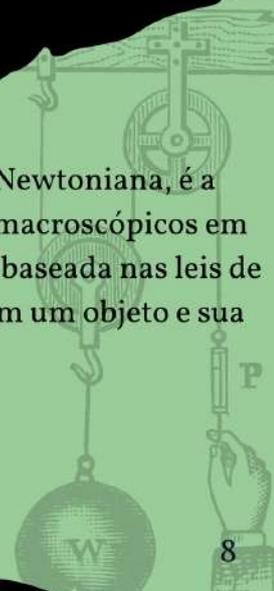
Um sistema físico isolado é aquele que não troca nem matéria nem energia com seu ambiente externo.



7

MECÂNICA

A Mecânica clássica, também conhecida como Mecânica Newtoniana, é a parte da Mecânica que descreve o movimento de objetos macroscópicos em velocidades muito menores que a velocidade da luz. Ela é baseada nas leis de Newton, que descrevem a relação entre a força aplicada em um objeto e sua interferência resultante.



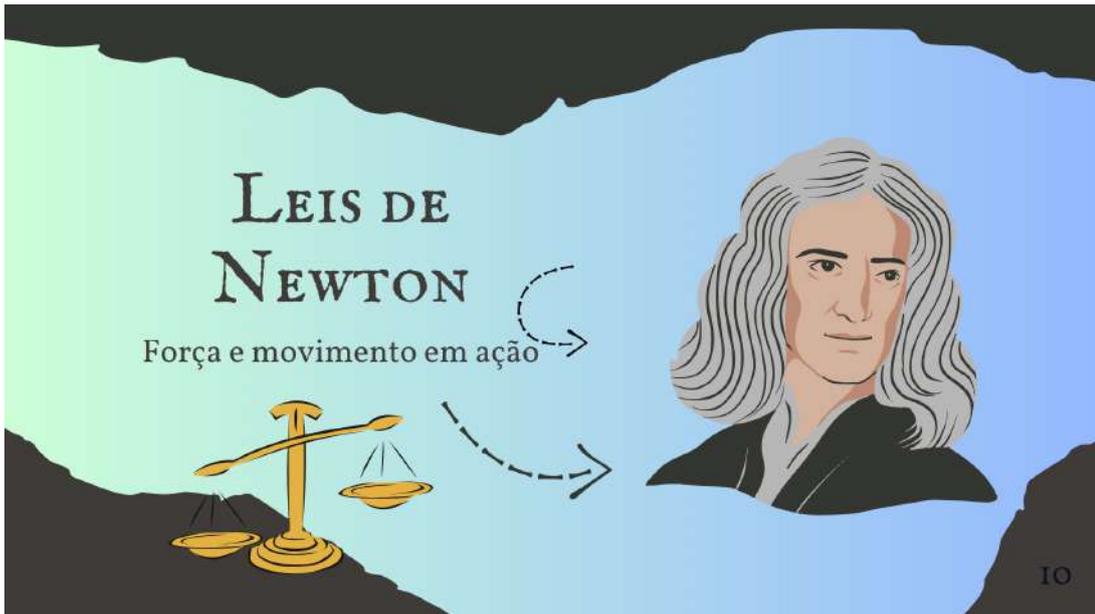
8

MECÂNICA NEWTONIANA

Baseia-se nas leis de Newton, que descrevem a relação entre a força aplicada em um objeto e sua interferência resultante.



9

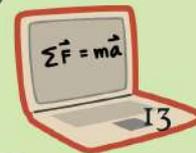


SEGUNDA LEI DE NEWTON

2.

Princípio Fundamental da Dinâmica

Afirma que a aceleração de um objeto com massa constante é proporcional à força resultante de todas as forças aplicadas sobre ele e tem o mesmo sentido que a força resultante.



2.

Princípio Fundamental da Dinâmica

O carro acelera para frente pois a força do seu motor é maior que o atrito na estrada.



14

TERCEIRA LEI DE NEWTON

3.

Lei da Ação e Reação

Toda força de ação tem uma força de reação de igual intensidade e direção mas em sentido oposto.

15

3.

Lei da Ação e Reação

Em um lançamento de foguete, a espaçonave exerce uma força para baixo, e a força de reação de mesma intensidade a empurra para cima.

16

POR HOJE É SÓ!

A força e o movimento estão relacionados porque o movimento é resultado da força.

O movimento de um objeto depende do equilíbrio das forças que atuam sobre ele.

As Leis de Newton são:

1. Lei da Inércia
2. Princípio Fundamental da Dinâmica
3. Lei da Ação e Reação

17

ENCONTRO III

18

ENERGIA

Na Física, um dos conceitos fundamentais é o que se refere a energia. Pode ser descrita como a capacidade de um sistema para realização de trabalho. Em outros termos, energia é a perícia de um sistema para produzir mudanças ou efeitos. Ela pode existir em diversas formas, como energia mecânica, energia térmica, energia elétrica, energia química, entre outras.



19

ENERGIA MECÂNICA

A energia mecânica é uma forma de energia que está relacionada ao movimento e à posição dos objetos. Ela é a soma da **energia cinética**, que é a energia associada ao movimento dos objetos, e a **energia potencial**, que é a energia mantida nos objetos devido à sua posição ou configuração.

$$E_m = E_c + E_p$$

20

ENERGIA CINÉTICA

A **energia cinética** de um objeto é definida como a energia que um objeto possui devido ao seu movimento.

Ela depende da massa e da velocidade do objeto, podendo ser calculada pela equação

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

onde m é a massa do objeto e v é o módulo da sua velocidade.

A energia cinética pode ser transformada em outras formas de energia, como a energia térmica, quando um objeto em movimento é freado ou colide com outro objeto.

21

ENERGIA POTENCIAL

A energia potencial, por sua vez, é a energia que um objeto possui devido à sua posição ou configuração em um campo de forças. Ela pode ser gravitacional, elástica, elétrica, magnética, entre outras.

A potencial gravitacional, por exemplo, é a energia armazenada por um objeto devido à sua posição em relação à Terra. Ela é representada pela equação

$$E_{p_g} = mgh$$

onde m é a massa do objeto, g é a aproximação da gravidade e h é a altura do objeto em relação a um ponto de referência.

Já a potencial elástica é a energia armazenada em uma mola ou em um objeto deformável, quando ele é esticado ou comprimido.

$$E_{p_e} = \frac{1}{2}kx^2$$

onde k é a constante elástica do objeto deformável e x é o deslocamento.

22

ENERGIA MECÂNICA

$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Energia Cinética 

$$E_{p_g} = mgh$$

Energia Potencial Gravitacional 

$$E_{p_e} = \frac{1}{2}kx^2$$

Energia Potencial Elástica 

23

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

A energia não se cria e não se destrói, apenas se transfere ou se transforma em outro tipo de energia, em quantidade iguais.



24

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

Desprezando as forças dissipativas, pode-se afirmar que a energia mecânica se conserva. Nesse caso o sistema é conservativo, isto é somente as forças conservativas atuam na realização de trabalho.

Em um sistema conservativo a energia mecânica total permanece constante qualquer que seja a transformação do sistema.
 $E_{M_i} = E_{M_f}$



POR HOJE É SÓ!

Na ausência de forças dissipativas, a energia mecânica é conservada.

$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Energia Cinética 

$$E_{p_g} = mgh$$

Energia Potencial Gravitacional 

$$E_{p_e} = \frac{1}{2}kx^2$$

Energia Potencial Elástica 

$$E_{M_i} = E_{M_f}$$

Conservação da Energia Mecânica 

ENCONTRO IV



FORÇA

Força é grandeza física vetorial, capaz de alterar o estado de equilíbrio de um corpo, provocar uma deformação ou anular a ação de outra força.



FORÇA RESTAURADORA

A força restauradora surge sempre no sentido de restaurar a posição de equilíbrio do objeto.



FORÇA RESTAURADORA

Nesse caso, por exemplo, a força restauradora corresponde a uma força elástica.



FORÇA RESTAURADORA

Matematicamente, a força elástica é diretamente proporcional a constante elástica da mola e a distância deslocada.

$$\vec{F}_{el} = -k\Delta x$$

Lei de Hooke

OSCILAÇÕES

As oscilações referem-se a movimentos repetitivos ou variações periódicas em torno de um ponto de equilíbrio. Um objeto ou sistema que oscila se move para frente e para trás, para cima e para baixo ou de forma cíclica em torno de uma posição central, retornando a essa posição repetidamente.

CARACTERÍSTICAS DAS OSCILAÇÕES

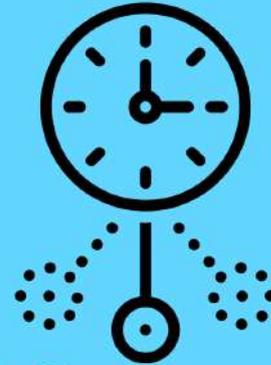
AMPLITUDE
É a distância máxima que um objeto se afasta do ponto de equilíbrio.

33

CARACTERÍSTICAS DAS OSCILAÇÕES

PERÍODO

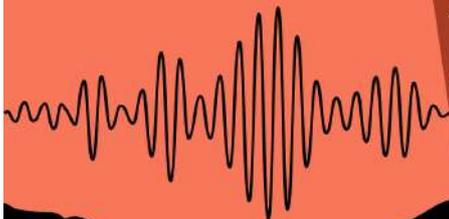
O período de uma oscilação é o tempo necessário para que um ciclo completo seja concluído, ou seja, para que o objeto ou sistema volte à posição inicial.



CARACTERÍSTICAS DAS OSCILAÇÕES

FREQUÊNCIA

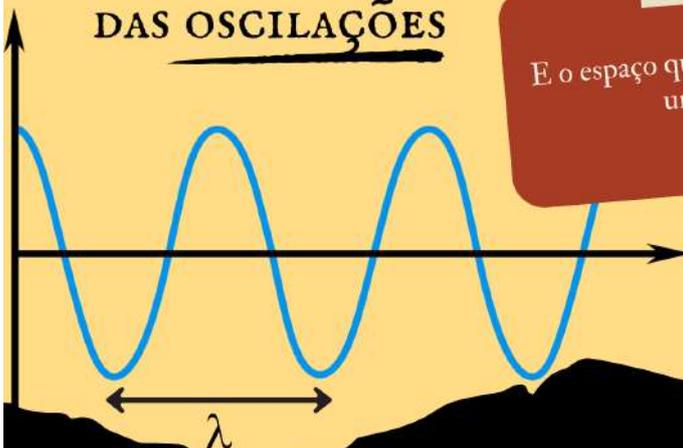
A frequência é o número de ciclos completos que ocorrem em uma unidade de tempo.



CARACTERÍSTICAS DAS OSCILAÇÕES

COMPRIMENTO DE ONDA

É o espaço que a onda percorre para completar uma oscilação (um ciclo).



POR HOJE É SÓ!

A força restauradora age no intuito de restaurar a posição de equilíbrio do objeto.

$$\vec{F}_{el} = -k\Delta x$$



As oscilações referem-se a movimentos repetitivos ou variações periódicas em torno de um ponto de equilíbrio.

PERÍODO

AMPLITUDE

FREQUÊNCIA

COMPRIMENTO DE ONDA

37



ENCONTRO V



38

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

O movimento harmônico simples (MHS) é aquele em que um corpo oscila em torno de uma posição de equilíbrio devido à ação de uma força restauradora, cuja natureza pode ser elástica, gravitacional, elétrica, entre outras.

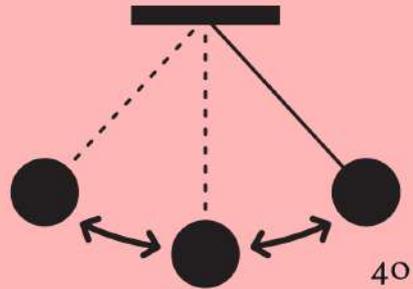


No MHS, não há forças dissipativas, como as forças de atrito e arraste, e, por isso, a energia mecânica total do sistema é conservada.

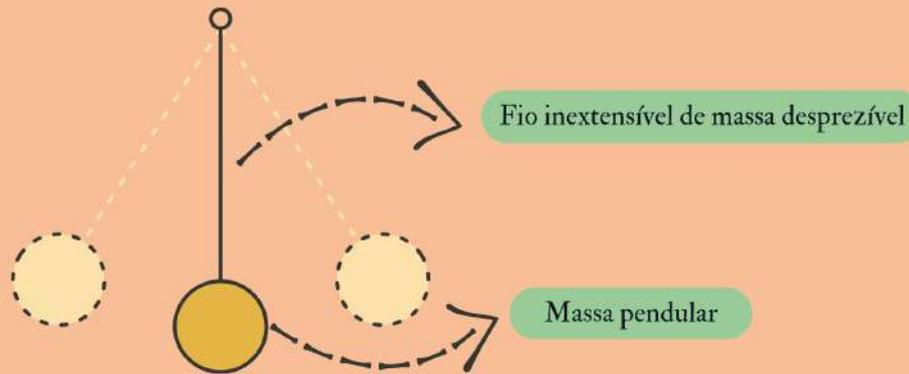
39

PENDULO SIMPLES

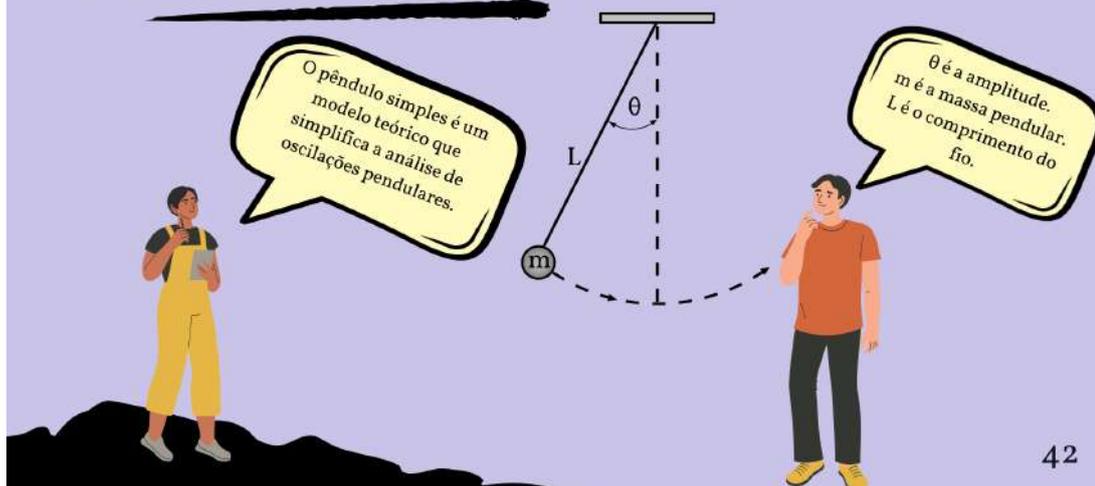
Um pêndulo simples é um dispositivo mecânico composto por uma massa pontual (ou quase pontual) chamada de "massa pendular" ou "massa suspensa" e um fio inextensível e leve, preso em um ponto fixo.



PENDULO SIMPLES



PENDULO SIMPLES



FORÇAS PRESENTES NO PENDULO SIMPLES

A força restauradora no pêndulo simples é a componente da força peso que tangencia a trajetória.

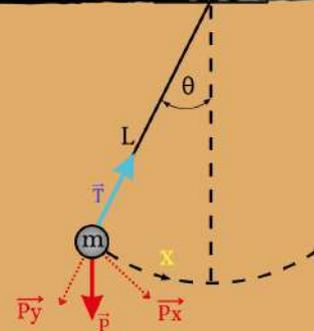
$$\vec{F}_\theta = \vec{P}_x = |\vec{P}| \sin \theta \quad (1)$$

Sua intensidade pode ser escrita como

$$F_\theta = -mg \sin \theta \quad (2)$$

Considerando que para pequenos ângulos $\sin \theta \approx \theta$, então:

$$F_\theta = -mg\theta \quad (3)$$



43

FORÇAS PRESENTES NO PENDULO SIMPLES

Do comprimento do arco s tem-se que

$$x = L\theta$$

ou seja,

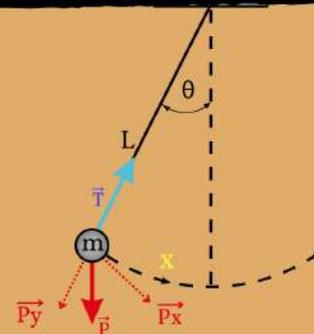
$$\theta = \frac{x}{L} \quad (4)$$

Substituindo a equação 4 na equação 3, Pode-se notar que:

$$F_\theta = -mg \frac{x}{L} \quad (5)$$

Fazendo, $k = \frac{mg}{L}$, chega-se à forma conhecida da intensidade da força restauradora dada pela lei de Hooke.

$$F = -kx \quad (6)$$



44

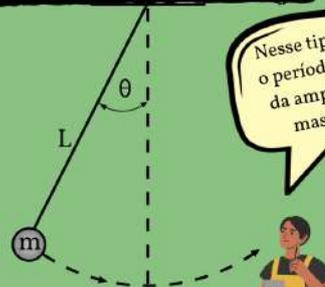
ELEMENTOS DO PENDULO SIMPLES

Período

O período de um pêndulo de pequena amplitude ($\theta \leq 10^\circ$) é diretamente proporcional a raiz quadrada do comprimento (L) e inversamente proporcional a raiz quadrada da aceleração da gravidade (g).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Nesse tipo de pêndulo, o período não depende da amplitude nem da massa pendular.



45

ELEMENTOS DO PENDULO SIMPLES

Velocidade angular

A velocidade angular, ou frequência angular (ω), de um pêndulo simples com amplitude pequena é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

onde k é uma constante dada por $\frac{mg}{L}$, como visto anteriormente e m é a massa pendular.

Então a frequência angular pode ser dada também por $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$



ELEMENTOS DO PENDULO SIMPLES

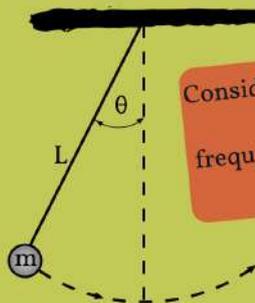
Frequência

A frequência de oscilações para esse tipo de pêndulo pode ser calculado como:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Considerando que $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, então a frequência pode ser expressa por:

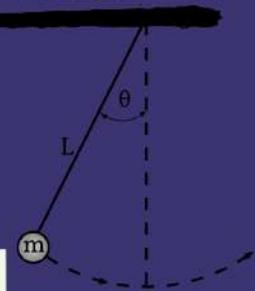
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$



ELEMENTOS DO PENDULO SIMPLES

Por essa relação, nota-se que a frequência é o inverso do período.

$$f = \frac{1}{T}$$



POR HOJE É SÓ!

O MHS é um tipo de movimento oscilatório periódico caracterizado por uma força restauradora proporcional ao deslocamento.



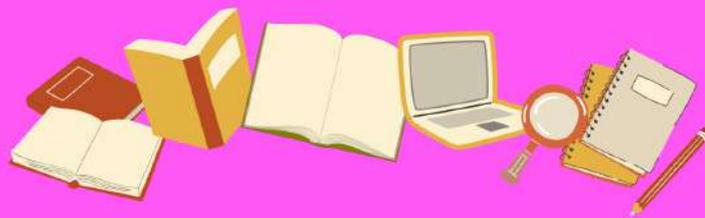
O período de oscilação depende do comprimento do fio e da aceleração da gravidade, mas não da massa.

Um pêndulo simples consiste em uma massa suspensa por um fio ou haste sem peso que oscila sob a influência da gravidade. Aproxima-se do MHS quando o ângulo de oscilação é pequeno.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

49

ENCONTRO VI



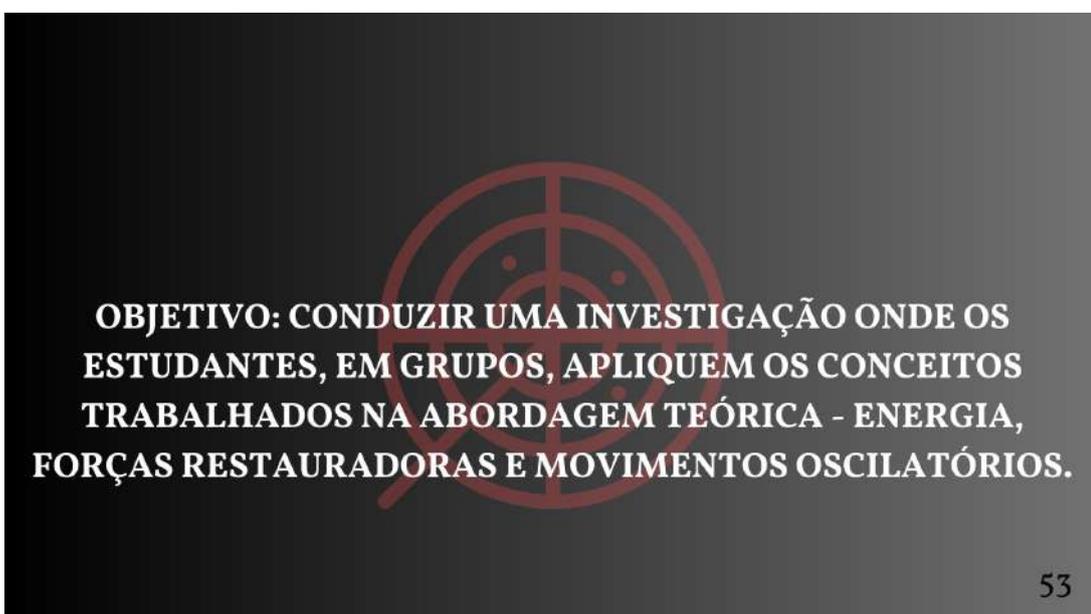
50

APLICAÇÃO DA SEI

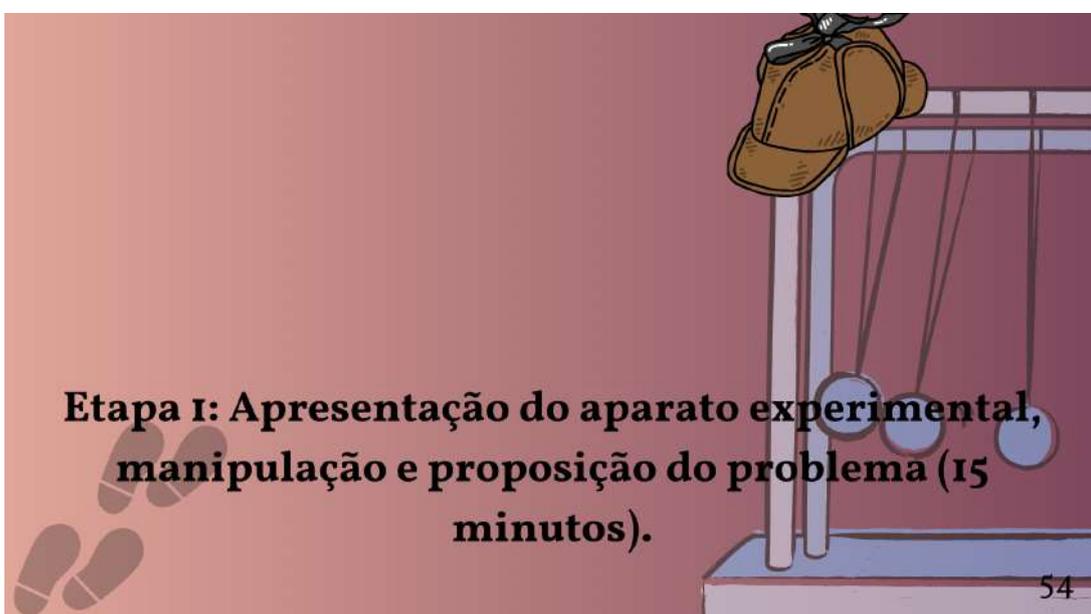
Essa metodologia pedagógica busca estimular a aprendizagem ativa e o desenvolvimento de habilidades científicas nos alunos através de investigações e experimentos práticos realizados em sala de aula.



51



53



54



Etapa 2: Identificação e exploração das hipóteses e previsões dos estudantes (20 minutos).

55



Etapa 3: Elaboração de planos de ação e execução do planejado (35 minutos).

56



Etapa 4: Análise dos resultados e revisão das hipóteses (20 minutos).

57



APÊNDICE B
Roteiro de atividade prática

APÊNDICE B1

ROTEIRO DE ATIVIDADE PRÁTICA DE MANUSEIO DO APARATO EXPERIMENTAL– INVESTIGAÇÃO GUIADA COM BASE NA SEI (SEQUÊNCIA DE ENSINO INVESTIGATIVO) - 1H50MIN.

Objetivo: Conduzir uma investigação onde os alunos, em grupos, apliquem os conceitos trabalhados na abordagem teórica - energia, forças restauradoras e movimentos oscilatórios.

ETAPAS DA ATIVIDADE:

Etapa 1: Apresentação do sistema de osciladores harmônicos acoplados, manipulação e proposição do problema (15 minutos).

- ✓ Proposição dos problemas investigativos:
 - Grupo 01: Como a energia mecânica total do sistema (cinética + potencial) se comporta durante o movimento oscilatório dos pêndulos acoplados?
 - Grupo 02: Como as energias cinética e potencial dos pêndulos variam durante o movimento oscilatório?
 - Grupo 03: Como a força elástica da mola varia em relação ao deslocamento causado pelo movimento dos pêndulos?
 - Grupo 04: De que forma o comprimento das hastes dos pêndulos influencia o período de oscilação do sistema?
 - Grupo 05: Como o movimento oscilatório de um dos pêndulos influencia o outro, devido ao acoplamento pela mola?
 - Grupo 06: Como a amplitude de oscilação dos pêndulos varia ao longo do tempo, e o que isso indica sobre a dissipação de energia no sistema?

Etapa 2: Identificação e exploração das hipóteses e previsões dos alunos (20 minutos)

- ✓ Nessa etapa será solicitado aos grupos que, com base na observação e manipulação inicial do material, façam previsões ou hipóteses sobre o comportamento das energias e das forças nos sistemas, de acordo com o problema recebido. O arquivo onde os estudantes descreverão suas hipóteses está disponível no apêndice A desse documento.

Etapa 3: Elaboração de planos de ação e execução do planejado (35 minutos)

- ✓ Após a etapa anterior, cada grupo escolhe uma ou mais hipóteses para investigar em detalhe. Eles devem refletir sobre como essas hipóteses podem ser testadas experimentalmente.
- ✓ Cada grupo elabora um plano detalhado de como vai testar suas hipóteses. O plano inclui: como medir as variáveis envolvidas (tempo de oscilação, deslocamento da mola, etc.); quais fatores serão mantidos constantes; como garantir a repetição do experimento para obter resultados mais precisos, entre outras possibilidades. Um modelo do plano a ser elaborado pelos grupos segue no apêndice 2 desse documento.
- ✓ Os grupos começam a realizar os experimentos planejados.

Etapa 4: Análise dos resultados e revisão das hipóteses (20 minutos)

- ✓ Após a coleta dos dados, os alunos organizam as informações e comparam os resultados experimentais com as suas previsões.

Etapa 5: Discussão e conclusão (20 minutos)

- ✓ Cada grupo apresenta os resultados de suas investigações explicando o problema recebido, a hipótese que investigaram, o procedimento experimental e as conclusões obtidas a partir dos dados.

APÊNDICE B2
PROBLEMAS E HIPÓTESES

ETAPA 1: APRESENTAÇÃO DO APARATO EXPERIMENTAL, MANIPULAÇÃO E PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

Grupo: _____

Problema:

_____.

ETAPA 2: IDENTIFICAÇÃO E EXPLORAÇÃO DAS HIPÓTESES E PREVISÕES DOS ALUNOS

Hipóteses do grupo:

_____.

APÊNDICE B3
MODELO DE PLANO DE AÇÃO

ETAPA 3: ELABORAÇÃO DE PLANO DE AÇÃO E EXECUÇÃO DO PLANEJADO

Plano de Ação do Grupo:

1- Identificação do grupo e do problema investigativo

Nome do grupo: _____

Problema investigativo: _____

2- Hipóteses a serem testadas

Hipótese 1: _____

Hipótese 2 (opcional): _____

3- Variáveis envolvidas

Variável independente (o que será alterado): _____

Variável dependente (o que será medido): _____

Variáveis controladas (o que será mantido constante): _____

4- Métodos e instrumentos de medida

- Variável a medir: _____
- Instrumento utilizado: _____
- Unidade de medida: _____
- Como será medida? _____

5- Descrição do experimento

Passos para realizar o experimento (listados em sequência):

- 1- _____
- 2- _____
- 3- _____
- 4- _____
- 5- _____

Quantas vezes o experimento será repetido para garantir a precisão dos dados? _____

6- Registro dos dados (Como os dados obtidos serão registrados? (ex.: tabela, gráficos, anotações)

7- Previsão dos resultados esperados (baseada nas hipóteses)

8- Observações adicionais

APÊNDICE C

Códigos de programação

APÊNDICE C1 - CÓDIGO PYTHON

PENDULO-DUPLO6-gpt4-whole2.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\DOUBLE\PENDULO-DUPLO6-gpt4-whole2.py (3.11.4)

File Edit Format Run Options Window Help

```
"""
# Código Python para simulação da dinâmica de Pêndulos Simples Acoplados com uma
Mola elástica

Este código implementa um simulador para a integração numérica da dinâmica de dois
pêndulos simples acoplados por uma mola elástica, utilizando o método de Runge-Kutta
de quarta ordem (RK-4). Ele permite visualizar as trajetórias dos dois pêndulos em
função do tempo, bem como ajustar interativamente os parâmetros de simulação.

## Funcionalidades Principais
1. **Integração numérica**:
   - As equações diferenciais que governam o sistema são resolvidas com o método RK-4.
   - As condições iniciais incluem deslocamento angular e velocidade inicial dos pêndulos.

2. **Gráficos interativos**:
   - Trajetórias dos pêndulos (posição angular) em função do tempo.
   - Representação gráfica dos pêndulos, mola e massas em movimento.

3. **Animação do sistema**:
   - Visualização da evolução do sistema em tempo real.
   - Representação gráfica da mola e dos bobs com movimento sincronizado.

4. **Interatividade**:
   - Ajuste de parâmetros como massa dos bobs, constante da mola e comprimento dos
     pêndulos via sliders.
   - Botões para parar e reiniciar a animação.

## Parâmetros Ajustáveis
- Massa dos pêndulos ( $m$ ): Entre 0,1 e 5,0 kg.
- Comprimento dos pêndulos ( $L$ ): Entre 0,5 e 5,0 metros.
- Constante elástica da mola ( $k$ ): Entre 0,001 e 0,1 N/m.

## Estrutura do Código
1. **Constantes iniciais**:
   - Massa, comprimento do pêndulo, constante da mola, gravidade, etc.
2. **Integração numérica**:
   - Cálculo iterativo da dinâmica do sistema com RK-4.
3. **Visualização gráfica**:
   - Representação das posições dos pêndulos, mola e trajetória em tempo real.
4. **Interatividade**:
   - Sliders e botões para controle da simulação.

## Referências
- Este programa foi projetado e implementado com base na metodologia de simulação de
  sistemas dinâmicos.
- Autor: N. M. Sotomayor; L. Y. A. Davila; RAFAEL MEDEIROS DE FREITAS. V. (Maio 2024).
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.widgets import Slider, Button
import matplotlib.animation as animation

# Constantes iniciais
initial_m = 1
initial_L = 1
initial_k = 0.01
g = 9.81 # aceleração devido à gravidade (m/s^2)

# Deslocamento angular inicial (rad) e velocidade tangencial (m/s) # PAGINA 01
```

```
# Deslocamento angular inicial (rad) e velocidade tangencial (m/s) # PAGINA 01
theta0, v0 = np.radians(60), 0
thetal, v1 = np.radians(30), 0
```

```
# Tempo de passo para integração numérica da equação de movimento (s).
dt = 0.01
```

```
# Inicializa as posições angulares e as velocidades tangenciais.
theta, v = [theta0], [v0]
theta2, v2 = [thetal], [v1]
```

```
# Número de períodos desejados
num_periods = 16 # Ajuste conforme necessário
```

```
# Tempo total de simulação
total_simulation_time = num_periods * (2 * np.pi * np.sqrt(initial_L / g))
```

```
def derivs(state, m, L, k):
    thetal, omegal, theta2, omega2 = state
    dthetal_dt = omegal
    domegal_dt = -(g / L) * np.sin(thetal) - (k / m) * (thetal - theta2)
    dtheta2_dt = omega2
    domega2_dt = -(g / L) * np.sin(theta2) + (k / m) * (thetal - theta2)
    return np.array([dthetal_dt, domegal_dt, dtheta2_dt, domega2_dt])
```

```
def run_simulation(m, L, k):
    theta, v = [theta0], [v0]
    theta2, v2 = [thetal], [v1]
    state = np.array([theta0, v0, thetal, v1])
```

```
t = 0
while t < total_simulation_time:
    k1 = derivs(state, m, L, k)
    k2 = derivs(state + 0.5 * dt * k1, m, L, k)
    k3 = derivs(state + 0.5 * dt * k2, m, L, k)
    k4 = derivs(state + dt * k3, m, L, k)
    state += dt / 6.0 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
    theta.append(state[0])
    v.append(state[1])
    theta2.append(state[2])
    v2.append(state[3])
    t += dt
return theta, theta2
```

```
theta, theta2 = run_simulation(initial_m, initial_L, initial_k)
```

```
def get_coords(th, L):
    return L * np.sin(th), -L * np.cos(th)
```

```
def get_coords2(th2, L):
    return L * np.sin(th2) + l, -L * np.cos(th2)
```

```
def plot_spring(x1, y1, x2, y2):
    num_coils = 20
    Ns = 1000
    L = np.sqrt((x2 - x1) ** 2 + (y2 - y1) ** 2)
    spring_length = L - 2 * bob_radius
```

```
w = np.linspace(0, spring_length, Ns)
xs = np.linspace(x1, x2, Ns)
```

PENDULO-DUPLO6-gpt4-whole2.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\DOUBLE\PENDULO-DUPLO6-gpt4-whole2.py (3.11.4)

File Edit Format Run Options Window Help

```
xs = np.linspace(x1, x2, Ns) # PAGINA 02
ys = np.linspace(y1, y2, Ns) + np.sin(w / spring_length * num_coils * 2 * np.pi) * 0.05

return xs, ys

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(12, 5))

# Ajustar a posição dos eixos da animação e do gráfico
ax1.set_position([0.3, 0.3, 0.6, 0.65])
ax2.set_position([0.3, 0.05, 0.6, 0.2])

x0, y0 = get_coords(theta0, initial_L)
x1, y1 = get_coords2(theta1, initial_L)
line1, = ax1.plot([0, x0], [0, y0], lw=3, c='k')
line2, = ax1.plot([1, x1], [0, y1], lw=3, c='k')
bob_radius = 0.12
bob_radius2 = 0.12
circle1 = ax1.add_patch(plt.Circle(get_coords(theta0, initial_L), bob_radius, fc='r', zorder=3))
circle2 = ax1.add_patch(plt.Circle(get_coords2(theta1, initial_L), bob_radius2, fc='b', zorder=3))

spring_xs, spring_ys = plot_spring(x0, y0, x1, y1)
spring_line, = ax1.plot(spring_xs, spring_ys, c='k', lw=2)

ax1.set_xlim(-initial_L * 1.2, initial_L * 2.2)
ax1.set_ylim(-initial_L * 1.5, initial_L * 0.5)

bob1_positions = []
bob2_positions = []

def animate(i):
    x, y = get_coords(theta[i], initial_L)
    line1.set_data([0, x], [0, y])
    circle1.set_center((x, y))
    x2, y2 = get_coords2(theta2[i], initial_L)
    line2.set_data([1, x2], [0, y2])
    circle2.set_center((x2, y2))

    spring_xs, spring_ys = plot_spring(x, y, x2, y2)
    spring_line.set_data(spring_xs, spring_ys)

    bob1_positions.append(x)
    bob2_positions.append(x2)

    plot_position_vs_time(i)

    return line1, line2, circle1, circle2, spring_line

nframes = len(theta)
interval = dt * 1000
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=nframes, repeat=True, interval=interval)

def plot_position_vs_time(i):
    ax2.clear()
    time_values = np.arange(0, i) * dt
    ax2.plot(time_values, bob1_positions[:i], label='Bob 1')
    ax2.plot(time_values, bob2_positions[:i], label='Bob 2')
    ax2.set_xlabel('Tempo (s)')
    ax2.set_ylabel('Posição')
    ax2.set_title('Evolução da Posição dos Bobs em Função do Tempo')
    ax2.legend()
    ax2.grid(True) # PAGINA 03
```

```
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=nframes, repeat=True, interval=interval)
```

```
def plot_position_vs_time(i):  
    ax2.clear()  
    time_values = np.arange(0, i) * dt  
    ax2.plot(time_values, bob1_positions[:i], label='Bob 1')  
    ax2.plot(time_values, bob2_positions[:i], label='Bob 2')  
    ax2.set_xlabel('Tempo (s)')  
    ax2.set_ylabel('Posição')  
    ax2.set_title('Evolução da Posição dos Bobs em Função do Tempo')  
    ax2.legend()  
    ax2.grid(True)
```

PAGINA 03

```
def stop_animation(event):  
    ani.event_source.stop()  
    plot_position_vs_time(len(theta))
```

```
def restart_animation(event):  
    ani.event_source.stop()  
    ani.frame_seq = ani.new_frame_seq()  
    bob1_positions.clear()  
    bob2_positions.clear()  
    ax2.clear()  
    ani.event_source.start()
```

Criação dos botões interativos

```
stop_button_ax = plt.axes([0.01, 0.3, 0.2, 0.04])  
stop_button = Button(stop_button_ax, 'Parar')  
stop_button.on_clicked(stop_animation)
```

```
restart_button_ax = plt.axes([0.01, 0.35, 0.2, 0.04])  
restart_button = Button(restart_button_ax, 'Reiniciar')  
restart_button.on_clicked(restart_animation)
```

Sliders para ajustar massa, constante da mola e comprimento do pêndulo

```
ax_mass = plt.axes([0.03, 0.75, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')  
ax_length = plt.axes([0.03, 0.7, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')  
ax_k = plt.axes([0.03, 0.65, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')
```

```
slider_mass = Slider(ax_mass, 'Massa', 0.1, 5.0, valinit=initial_m)  
slider_length = Slider(ax_length, 'Length', 0.5, 5.0, valinit=initial_L)  
slider_k = Slider(ax_k, 'k', 0.001, 0.1, valinit=initial_k)
```

```
def update(val):  
    global theta, theta2, initial_m, initial_L, initial_k  
    initial_m = slider_mass.val  
    initial_L = slider_length.val  
    initial_k = slider_k.val  
    theta, theta2 = run_simulation(initial_m, initial_L, initial_k)  
    ax1.set_xlim(-initial_L * 1.2, initial_L * 2.2)  
    ax1.set_ylim(-initial_L * 1.5, initial_L * 0.5)  
    ani.event_source.stop()  
    ani.frame_seq = ani.new_frame_seq()  
    ani.event_source.start()
```

```
slider_mass.on_changed(update)  
slider_length.on_changed(update)  
slider_k.on_changed(update)
```

```
plt.show()
```

#PAGINA 04

APÊNDICE C2 - CÓDIGO ARDUÍNO

```
arduino_tesste_encoder_ino | Arduino IDE 2.3.3
Arquivo Editar Rascunho Ferramentas Ajuda
Selecionar Placa
arduino_tesste_encoder_ino
1 //Declaração de variáveis globais
2
3 // Define os pinos digitais 2 e 3 como entradas para os sinais do encoder incremental.
4 //Esses pinos receberão os sinais dos canais A e B do encoder.
5 int encoderPin1 = 2;
6 int encoderPin2 = 3;
7 //interruptPin1 = 2; alternativa
8 //interruptPin2 = 3; alternativa
9 volatile int lastEncoded = 0; //Declara que a variável pode mudar inesperadamente (interrupções a alteram).
10 //lastEncoded: Armazena o último estado codificado dos sinais A e B.
11 volatile long encoderValue = 0; //Variável que armazena o valor atual do ângulo ou posição relativa calculada pelo encoder.
12 long lastencoderValue = 0; //Último valor conhecido de encoderValue, usado para comparação ou cálculos posteriores.
13 int lastMSB = 0; //Armazena o último valor do sinal A do encoder.
14 int lastLSB = 0; //Armazena o último valor do sinal B do encoder.
15
16 void setup() //Inicializa a comunicação serial com velocidade de 9600 bits por segundo para enviar dados ao monitor serial.
17 {
18   Serial.begin(9600);
19   pinMode(encoderPin1, INPUT_PULLUP); // define-se a porta digital como entrada com pull-up ativado (retorna nada)
20   pinMode(encoderPin2, INPUT_PULLUP); // define-se a porta digital como entrada com pull-up ativado (retorna nada)
21   digitalWrite(encoderPin1, HIGH); // Se nenhuma entrada esta presente coloca-se pino 2 como HIGH +5V
22   digitalWrite(encoderPin2, HIGH); // Se nenhuma entrada esta presente coloca-se pino 3 como HIGH +5V
23   attachInterrupt(0, updateEncoder, CHANGE); // chamar a subrotina updateEncoder() quando qualquer mudança alto/baixo seja detectada na
24   //porta e acciona a interrupção (no interrupt 0 (pin 2), ou no interrupt 1 (pin 3))
25   attachInterrupt(1, updateEncoder, CHANGE);
26   // attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(2), updateEncoder, CHANGE); // alternativa
27   // attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(3), updateEncoder, CHANGE); // alternativa
28 }
29
30 //PAGINA 01
31
32
33 //Laço principal (loop)
34 //Envia o valor atual de encoderValue (posição calculada) para o monitor serial a cada 50 ms, facilitando a visualização da posição em tempo real.
35
36 void loop()
37 {
38   Serial.println(encoderValue); //imprime o valor do angulo
39   delay(50);
40 }
41 //*****
42 //Função de interrupção (updateEncoder)
43 void updateEncoder()
44 //Essa função é executada automaticamente quando ocorre uma mudança no sinal do encoder.
45 {
46   int MSB = digitalRead(encoderPin1); //MSB = bit mais significativo. Lê a porta 2 e atribui o valor à variável MSB, poderia ser sinal A = MSB
47   int LSB = digitalRead(encoderPin2); //LSB = bit menos significativo. Lê a porta 3 e atribui o valor à variável LSB, poderia ser sinal B = LSB
48
49   int encoded = (MSB << 1) | LSB; //é aumentado um zero à direita do binário MSB (A), emseguida é comparado com LSB (B) é formado um binário
50   //com os dígitos mais significativos dos dois A e B esse valor atribuído a encoded.
51   int sum = (lastEncoded << 2) | encoded; //é aumentado dois zeros à direita do binário lastEncoded, emseguida é comparado com encoded e formado um
52   //binário com os dígitos mais significativos dos dois esse valor é atribuído a soma.
53
54   if(sum == 0b1101 || sum == 0b0100 || sum == 0b0010 || sum == 0b1011) encoderValue ++; //A partir de qualquer posição, se rotação horária aumentar angulo
55   //em um passo
56   if(sum == 0b1110 || sum == 0b0111 || sum == 0b0001 || sum == 0b1000) encoderValue --; //A partir de qualquer posição, se rotação antihorária diminuir
57   //angulo em um passo
58   lastEncoded = encoded; //armazena encoded em lastEncoded para a próxima vez.
59 }
60 //PAGINA 02
```

APÊNDICE D
Produto educacional

MNPEF

Mestrado Nacional
Profissional em
Ensino de Física



SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA

Rafael Medeiros de Freitas

EXPLORANDO A DINÂMICA NÃO LINEAR EM SISTEMAS
OSCILANTES: UM GUIA DIDÁTICO PARA O ENSINO DE FÍSICA

PRODUTO EDUCACIONAL

Araguaína - TO
2025



RAFAEL MEDEIROS DE FREITAS

EXPLORANDO A DINÂMICA NÃO LINEAR EM SISTEMAS OSCILANTES: UM GUIA DIDÁTICO PARA O ENSINO DE FÍSICA

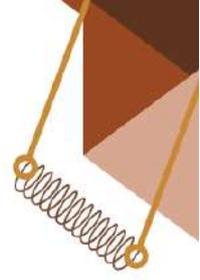
Produto de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, no Curso de Mestrado Profissional de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador(a): Profa. Dra. Liliana Yolanda Ancalla Davila

Coorientador: Dr. Nilo Maurício Sotomayor Choque

Araguaína - TO
2025





LISTA DE ILUSTRAÇÃO

Figura 2.1	Esquemática de dois pêndulos acoplados por uma mola	12
Figura 2.2	Conexão encoder - Arduíno	13
Figura 2.3	Sistema de aquisição de dados de dois pêndulos acoplados com mola, utilizando encoders, Arduínos e o software LabVIEW para análise do movimento.	14
Figura 2.4	Portal de madeira	15
Figura 2.5	Trilho guia de eixo duplo: Projetada para movimento linear suave e preciso em máquinas e sistemas de automação, com trilhos paralelos e elementos rolantes.	16
Figura 2.6	Detalhe dos elementos rolantes	16
Figura 2.7	Guia linear em perspectiva	16
Figura 2.8	Bloco deslizante com sistema de travamento integrado.	17
Figura 2.9	Encoders óptico rotativos com conectores e cabos destacados.	18
Figura 2.10	Encoders óptico - especificações de conexão.	19
Figura 2.11	Vista lateral dos encoders ópticos incrementais.	19
Figura 2.12	Suporte semicircular em Nylon para fixação precisa dos encoders.	20
Figura 2.13	Bloco de madeira utilizado como elemento de acoplamento entre suporte de poliamida e blocos deslizantes em AutoCAD.	21
Figura 2.14	Bloco de madeira fixado ao bloco deslizante e ao suporte de poliamida através de parafusos metálicos	22
Figura 2.15	Hastes de acrílico transparente.	22
Figura 2.16	Hastes de acrílico com flanges metálicos.	23
Figura 2.17	Flanges metálicos em perspectiva frontal e lateral, destacando os furos para fixação.	23
Figura 2.18	Dimensões dos flanges.	24
Figura 2.19	Parafusos utilizados no acoplamento dos flanges às hastes.	25
Figura 2.20	molas metálicas de diferentes tamanhos e espessuras utilizados no experimento.	25
Figura 2.21	Microcontroladores Arduíno UNO, mostrando componentes eletrônicos como portas USB, pinos de entrada e saída, e conectores de alimentação.	26
Figura 2.22	Cabos USB tipo B	27
Figura 2.23	Estrutura física em AutoCAD com indicação dos principais elementos.	28
Figura 2.24	Representação ampliada da estrutura física com foco nos principais componentes.	29
Figura 2.25	Guia linear fixada ao portal de madeira.	30
Figura 2.26	Detalhe lateral da montagem da guia linear sobre portal de madeira.	31
Figura 2.27	Suporte para os encoders.	32
Figura 2.28	Acoplamento dos encoders aos blocos deslizantes.	33

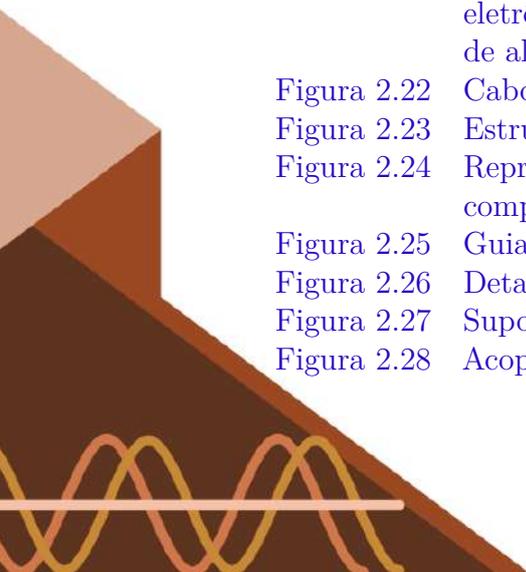
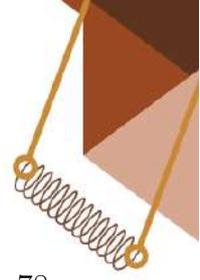
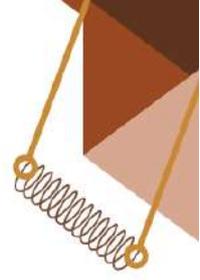


Figura 2.29	Acoplamento dos encoders aos blocos deslizantes - vista superior dos componentes.	33
Figura 2.30	Acoplamento dos encoders aos blocos deslizantes - vista frontal e posterior.	34
Figura 2.31	Montagem dos encoders ópticos na guia linear.	35
Figura 2.32	Hastes de acrílico sendo manufaturadas na cortadora laser.	36
Figura 2.33	Hastes acopladas aos flanges por parafusos.	36
Figura 2.34	Hastes acopladas aos encoders.	37
Figura 2.35	Disposição final dos componentes mecânicos.	38
Figura 2.36	Vista lateral da estrutura de madeira com os elementos inseridos .	39
Figura 2.37	Ligação entre encoder e placa Arduíno.	40
Figura 2.38	<i>Setup</i> experimental com Arduíno para coleta automatizada de dados do sistema oscilatório desenvolvido.	41
Figura 3.1	Encoder incremental óptico.	44
Figura 3.2	Elementos constituintes do encoder.	45
Figura 3.3	Resoluções de encoders.	45
Figura 3.4	Estrutura do encoder óptico incremental.	46
Figura 3.5	Vista esquemática do circuito.	47
Figura 3.6	Placa Arduíno UNO.	48
Figura 3.7	Home page da Python Foundation.	50
Figura 3.8	Sistemas operacionais disponíveis.	51
Figura 3.9	Versões do Python.	52
Figura 3.10	Opções de instalação.	53
Figura 3.11	Recursos opcionais.	54
Figura 3.12	Opções avançadas.	55
Figura 3.13	Código da simulação de um pêndulo simples - página 1 de 4	58
Figura 3.14	Código da simulação de um pêndulo simples - página 2 de 4	59
Figura 3.15	Código da simulação de um pêndulo simples - página 3 de 4	60
Figura 3.16	Código da simulação de um pêndulo simples - página 4 de 4	61
Figura 3.17	Interface da simulação de um pêndulo simples	62
Figura 3.18	Código da simulação de um pêndulo simples amortecido - página 1 de 3	64
Figura 3.19	Código da simulação de um pêndulo simples amortecido - página 2 de 3	65
Figura 3.20	Código da simulação de um pêndulo simples amortecido - página 3 de 3	66
Figura 3.21	Interface da simulação de um pêndulo simples amortecido	67
Figura 3.22	Código da simulação de um pêndulo simples forçado - página 1 de 4	70
Figura 3.23	Código da simulação de um pêndulo simples forçado - página 2 de 4	71
Figura 3.24	Código da simulação de um pêndulo simples forçado - página 3 de 4	72
Figura 3.25	Código da simulação de um pêndulo simples forçado - página 4 de 4	73
Figura 3.26	Interface da simulação de um pêndulo simples forçado	74
Figura 3.27	Código da simulação de dois pêndulos simples acoplados por mola elástica - página 1 de 4	76
Figura 3.28	Código da simulação de dois pêndulos simples acoplados por mola elástica - página 2 de 4	77

Figura 3.29	Código da simulação de dois pêndulos simples acoplados por mola elástica - página 3 de 4	78
Figura 3.30	Código da simulação de dois pêndulos simples acoplados por mola elástica - página 4 de 4	79
Figura 3.31	Interface da simulação de dois pêndulos simples acoplados por mola elástica	80
Figura 3.32	Alterando a massa pendular.	81
Figura 3.33	Simulação em Python com alteração do comprimento dos fios	81
Figura 3.34	Simulação em Python com alteração da constante elástica da mola	82
Figura 3.35	Home page da plataforma Arduino	84
Figura 3.36	Opções para download	85
Figura 3.37	Iniciando o download	85
Figura 3.38	Acordo de licença	86
Figura 3.39	Opções de instalação	87
Figura 3.40	Escolha da pasta de instalação	88
Figura 3.41	Progresso da instalação	89
Figura 3.42	Conclusão da instalação	90
Figura 3.43	Tela inicial da IDE	91
Figura 3.44	Preferências	92
Figura 3.45	Teste do código Arduino	93
Figura 3.46	Diagrama de blocos em LabVIEW	94
Figura 3.47	Interface do Labview	95
Figura 4.1	Sequência de Ensino Investigativo	97





LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 Sequência de aulas	100
---	-----

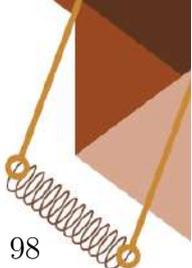




SUMÁRIO

1	APRESENTAÇÃO	9
2	SISTEMA EXPERIMENTAL - DOIS PÊNDELLOS ACOPLADOS POR UMA MOLA	11
2.1	Componentes e materiais utilizados	14
2.1.1	Portal de madeira	15
2.1.2	Guia Linear e blocos deslizantes	16
2.1.3	Encoder óptico	17
2.1.4	Suporte em poliamida	20
2.1.5	Bloco de madeira	21
2.1.6	Hastes de acrílico	22
2.1.7	Flanges e parafusos	23
2.1.8	Mola	25
2.1.9	Placas Arduino	26
2.1.10	Cabos USB	27
2.2	Montagem e Estrutura	28
2.2.1	Etapa 1 - Fixação da guia ao portal	30
2.2.2	Etapa 2 - Acoplamento dos encoders aos blocos deslizantes	31
2.2.3	Etapa 3 - Montagem das hastes	35
2.2.4	Etapa 4 - Posicionamento da mola	37
2.2.5	Etapa 5 - Conexão das placas Arduino	39
3	AUTOMAÇÃO DA AQUISIÇÃO DE DADOS	42
3.1	Hardware e Software	42
3.1.1	Hardware	43
3.1.1.1	<i>Funcionamento do encoder óptico incremental</i>	43
3.1.1.2	<i>Placa Arduino UNO e microcontrolador</i>	46
3.1.2	Software	48
3.1.2.1	<i>Linguagem desenvolvimento Python</i>	48
3.1.2.1.1	Instalando o Python no computador	49
3.1.2.1.2	Simulações	55
3.1.2.1.3	Variação dos Parâmetros dos Pêndulos Acoplados	80
3.1.2.2	<i>Ambiente de Desenvolvimento Integrado (IDE) do Arduino</i>	83
3.1.2.2.1	Instalação do Ambiente de Desenvolvimento Integrado (IDE)	83
3.1.2.2.2	Código Arduino	92
3.1.2.3	<i>Ambiente gráfico de programação LabVIEW</i>	93
4	APLICAÇÃO	96
4.1	Etapas da Sequência de Ensino Investigativo (SEI)	96
4.1.1	Introdução e Motivação	97





4.1.2	Investigação e Exploração	98
4.1.3	Síntese e Compartilhamento	98
4.2	Aplicação do produto	99
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	101
	REFERÊNCIAS	102
	Artigo de periódicos	102
	Artigo de anais de conferência	102
	Livro	103
	TCC	103
	Referências online	103
	APÊNDICES	104
	Apêndice A	105
	Apêndice B	107
	Apêndice C	109



1 APRESENTAÇÃO

Os desafios do ensino de Física no Ensino Médio permanecem como um dos principais obstáculos para o desenvolvimento pleno dos estudantes. Grande parte dessas dificuldades decorre do distanciamento entre a teoria e a prática, comprometendo a motivação e o engajamento dos alunos. Pensando nisso, este produto educacional foi desenvolvido com o objetivo de integrar a experimentação, a simulação computacional e o uso de recursos digitais, especialmente no campo da Mecânica, aproximando essas dimensões que, juntas, enriquecem o processo de aprendizagem.

O produto educacional inclui em um sistema experimental formado por dois pêndulos acoplados por uma mola, com sensores de posição (encoders) conectados a placas Arduíno, permitindo a coleta precisa dos dados de deslocamento angular. Para viabilizar o funcionamento do aparato, foram desenvolvidos códigos específicos para o Arduíno, responsáveis pela leitura dos dados dos encoders, além de códigos implementados no LabVIEW para aquisição, processamento e visualização gráfica dos dados em tempo real. A construção física do sistema conta ainda com desenhos em AutoCAD, fornecendo detalhes técnicos para garantir precisão e qualidade no processo de montagem.

Além do aparato experimental, o produto contempla um manual detalhado que orienta passo a passo a construção e a calibração do sistema, além de apresentar uma descrição formal e abrangente do seu funcionamento. Esse manual também integra simulações computacionais desenvolvidas com foco tanto nos aspectos numéricos quanto na visualização gráfica, utilizando códigos em Python que permitem a reprodução, análise e interpretação dos fenômenos simulados.

O material é complementado por um e-book, que organiza e sistematiza todos os elementos do produto educacional, servindo como um guia teórico, prático e metodológico. Juntamente com o e-book, foi elaborada uma Sequência de Ensino Investigativo (SEI), estruturada para conduzir o uso do sistema experimental e das simulações em sala de aula. Essa sequência foi planejada com o objetivo de promover o aprendizado ativo por meio da exploração, formulação de hipóteses e investigação científica, incentivando a participação ativa dos estudantes. Para potencializar a aplicação prática do produto, também foram desenvolvidas aulas teóricas e práticas integradas, questionário diagnóstico e atividades complementares que orientam o aprofundamento dos conceitos abordados.

Desenvolvido com propósitos didáticos, o produto educacional promove a integração entre a sala de aula e as atividades práticas em laboratórios de ensino de Física, servindo como uma ferramenta para motivar os estudantes e dar suporte às aulas teóricas. Sua aplicação ocorre, especificamente, em aulas de Mecânica no Ensino Médio, incentivando a prática experimental e o uso de tecnologias computacionais como complementos essenciais ao aprendizado teórico. A proposta busca, portanto, aproximar a teoria e a prática no ensino de Física, reforçando os conceitos estudados e desenvolvendo habilidades investigativas nos alunos.

Dessa forma, o produto educacional integra o sistema experimental, o manual detalhado, as simulações computacionais, os códigos em Arduíno, LabVIEW e Python, os desenhos em AutoCAD, as aulas teóricas e práticas, a sequência investigativa e o questionário de avaliação diagnóstica, compondo um conjunto completo e articulado de

materiais que enriquecem o ensino e a aprendizagem da Mecânica no Ensino Médio.

Rafael Medeiros de Freitas

2 SISTEMA EXPERIMENTAL - DOIS PÊNDELULOS ACOPLADOS POR UMA MOLA

A concepção deste trabalho baseia-se em uma pesquisa bibliográfica robusta, que consolida o uso de dispositivos tecnológicos acessíveis, como o Arduíno, em demonstrações e investigações de fenômenos físicos. A relevância do aparato desenvolvido nesta pesquisa está alinhada a diversas iniciativas anteriores, destacando-se, contudo, por sua proposta inovadora. Esse diferencial agrega valor tanto à Ciência quanto ao avanço tecnológico, além de fortalecer a inclusão de ferramentas e recursos didáticos acessíveis em salas de aula de diferentes contextos.

Além da bibliografia considerada, fez-se necessário um vasto estudo sobre a plataforma programável, sobre o código necessário para o funcionamento, a montagem do circuito e os elementos constituintes. Paralelamente a isso, a abordagem exigiu o desenvolvimento de saberes relacionados a desenhos técnicos estruturais em AutoCAD, adaptação ao ambiente de desenvolvimento e linguagem de programação gráfica LabVIEW para exibição em tempo real dos gráficos, além do desenvolvimento de código computacional em Python para integração numérica das equações do movimento pendular e para a visualização gráfica.

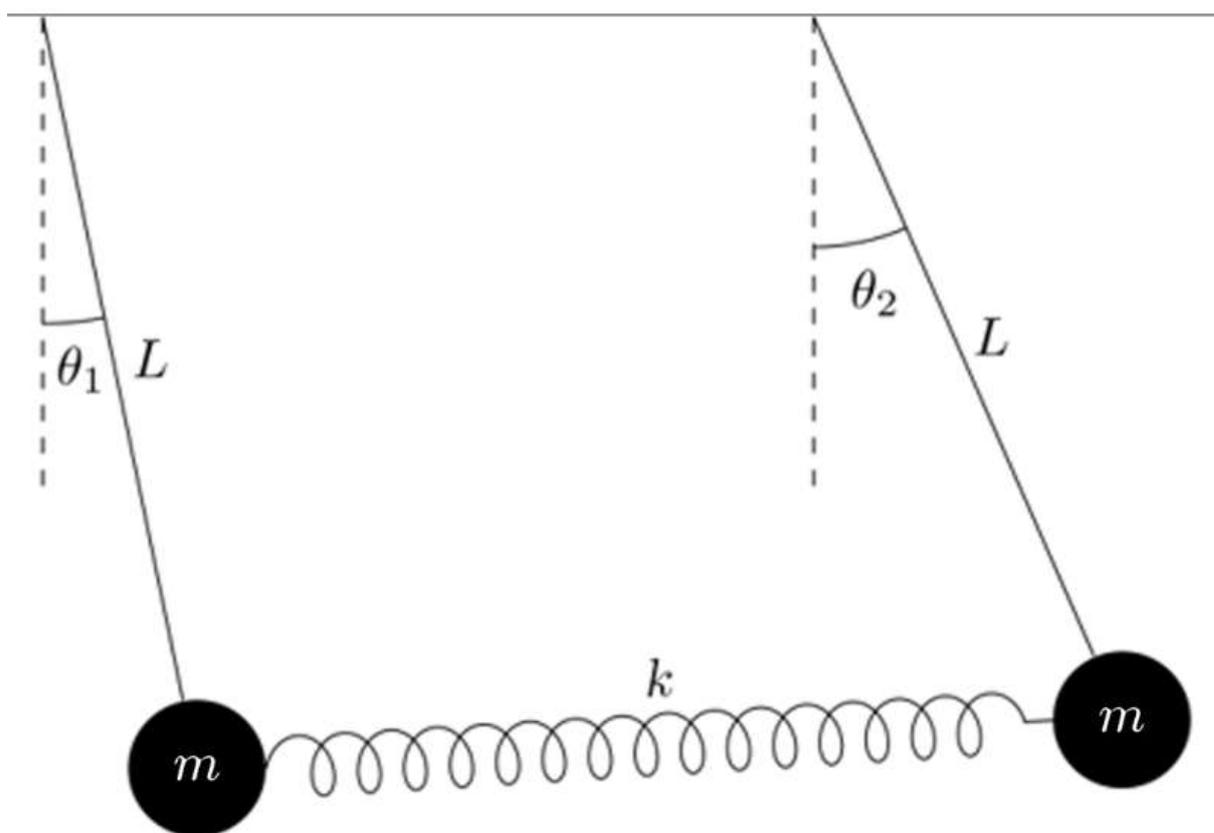
A construção do sistema dos dois pêndulos acoplados por uma mola foi desenvolvida quase que integralmente no Laboratório de Materiais para Aplicações em Dispositivos Eletrônicos LABMADE da Universidade Federal do Norte do Tocantins. A unidade conta com uma infraestrutura física de aproximadamente 120 m² dividida em 6 salas. Conta também com diversas facilidades de pesquisa, entre elas microcomputadores, ferramentas, máquinas, softwares de desenho técnico, softwares para instrumentação, bancadas, entre outras. Também conta com tecnologia, desenvolvida através de vários anos, em instrumentação, automação, controle de sistemas e aquisição analógico-digital de dados de grandezas físicas.

Em relação ao sistema físico em estudo, o LABMADE tem orientado trabalhos sobre sistemas dinâmicos não lineares. Além da descrição física de sistemas mecânicos, foi enfatizado também o estudo do formalismo matemático, principalmente em relação a espaços topológicos e variedades.

A motivação para o presente trabalho parte do fato de que boa parte dos objetos materiais, em especial os sólidos, podem ser considerados como um conjunto muito grande de osciladores harmônicos simples acoplados entre eles (átomos e moléculas em materiais sólidos). É de interesse para os físicos, do ponto de vista teórico, experimental e didático, compreender como esse efeito de acoplamento pode afetar o comportamento de cada um dos osciladores individuais.

Um sistema simples que pode ajudar a entender esse comportamento complexo pode ser construído a partir de dois pêndulos idênticos de comprimento L interconectados por uma mola com alguma constante elástica k , como mostra a figura 2.1. Pode-se estudar o movimento de cada um usando a formulação de Lagrange da mecânica clássica (THORNTON; MARION, 2019).

Figura 2.1 – Esquematização de dois pêndulos acoplados por uma mola

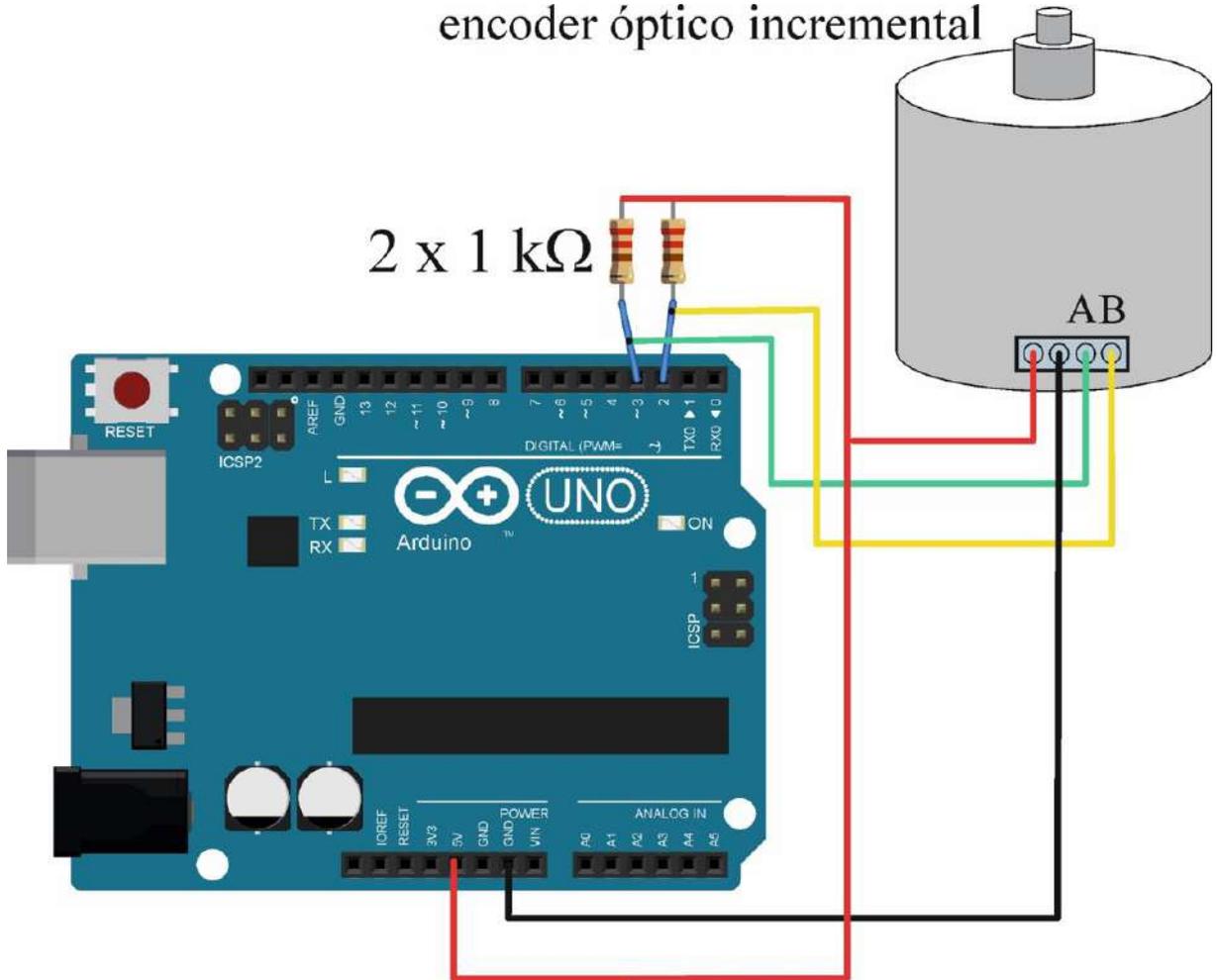


Fonte: N. M. Sotomayor

Dessa forma, o aparato físico constitui-se basicamente dos elementos citados acima (dois pêndulos acoplados por uma mola de pequena constante elástica). Uma estrutura de madeira foi desenvolvida a fim de fixar os pêndulos minimizando alterações verticais. Tal estrutura conta também com um trilho que permite variar as posições horizontais de cada pêndulo. A captação das oscilações mecânicas é realizada por meio de encoders ópticos e posteriormente transformadas em sinais digitais com o intermédio da plataforma programável Arduino, como é possível visualizar na figura 2.2, a qual apresenta a configuração genérica da conexão entre um encoder e uma placa Arduino UNO.

Figura 2.2 – Conexão encoder - Arduino

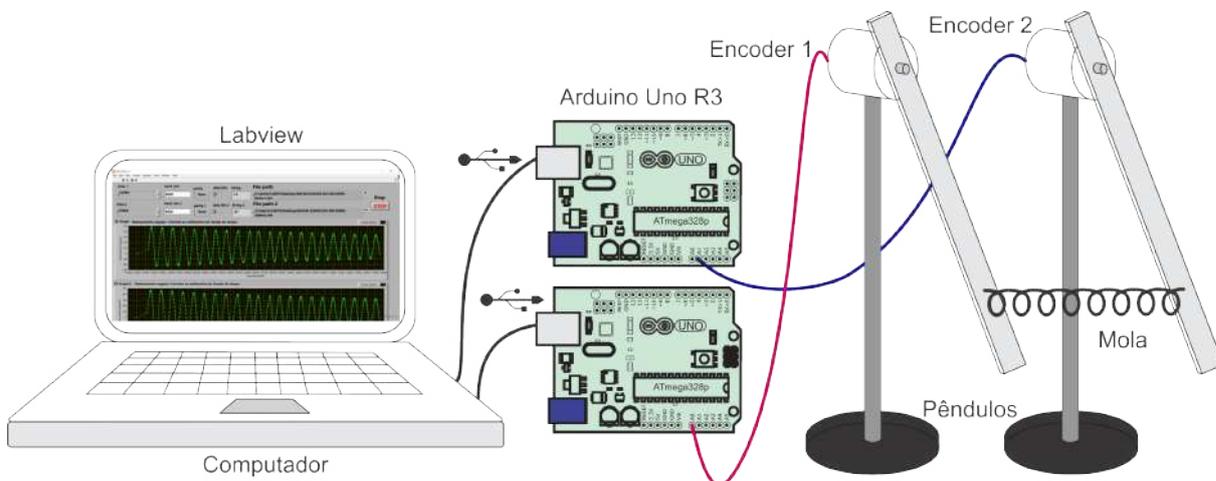
encoder óptico incremental



Fonte: N. M. Sotomayor

A figura 2.3 mostra a esquematização do sistema experimental utilizado para medir o deslocamento angular de dois pêndulos acoplados por uma mola, com aquisição automática de dados. Na imagem, observa-se os dois pêndulos conectados por uma mola, representando um sistema de osciladores acoplados, os encoders ópticos instalados no topo de cada pêndulo para medir o deslocamento angular, dois módulos Arduino Uno R3, responsáveis pela leitura dos dados dos encoders e envio das informações para o computador e o computador com software LabVIEW para o processamento e exibição dos dados recebidos dos Arduínos em gráficos de deslocamento angular em função do tempo.

Figura 2.3 – Sistema de aquisição de dados de dois pêndulos acoplados com mola, utilizando encoders, Arduínos e o software LabVIEW para análise do movimento.



Fonte: N. M. Sotomayor

2.1 Componentes e materiais utilizados

Para a construção do sistema experimental proposto, foi necessário selecionar cuidadosamente os componentes e materiais que possibilitam sua montagem, funcionamento e coleta de dados de forma eficiente e precisa. Cada item foi escolhido com base em sua relevância e precisão para o estudo das propriedades físicas envolvidas, bem como sua compatibilidade com o sistema de aquisição automática de dados. Abaixo, apresenta-se a lista de itens utilizados no experimento, seguida por uma descrição detalhada de cada componente, destacando suas especificações técnicas e papel no experimento, além de justificativas para sua inclusão no sistema.

Lista de materiais utilizados:

- Portal de madeira;
- Guia linear;
- Blocos deslizantes;
- Encoders óptico;
- Suporte de poliamida;
- Bloco de madeira;
- Hastes de acrílico;
- Flanges;
- Parafusos;
- Mola;

- Placas programáveis Arduino UNO;
- Cabos USB tipo B.

2.1.1 Portal de madeira

Figura 2.4 – Portal de madeira



Fonte: Autoria própria

A estrutura foi construída em madeira do tipo cedro, visando proporcionar uma base estável e confiável para a fixação dos pêndulos utilizados no experimento. O arranjo inclui uma base retangular com 1 metro de comprimento, duas colunas verticais de 90 centímetros de altura cada, e uma viga superior, também com 90 centímetros de comprimento, onde são instalados os encoders. A configuração foi projetada com o propósito de maximizar a estabilidade do conjunto, minimizando quaisquer movimentos indesejados que poderiam interferir na precisão das medições e na observação dos fenômenos físicos investigados. A estrutura apresenta uma massa aproximada de 15 kg, combinando robustez e funcionalidade. A escolha da madeira como material estrutural alia baixo custo financeiro, durabilidade e

facilidade de manipulação, contribuindo significativamente para a eficiência do aparato experimental.

O portal foi confeccionado em uma marcenaria localizada na cidade de Imperatriz, Maranhão. A construção foi realizada com base em especificações detalhadas fornecidas ao marceneiro, garantindo que o design atendesse aos requisitos técnicos do projeto.

2.1.2 Guia Linear e blocos deslizantes

Figura 2.5 – Trilho guia de eixo duplo: Projetada para movimento linear suave e preciso em máquinas e sistemas de automação, com trilhos paralelos e elementos rolantes.



Fonte: Autoria própria

Figura 2.6 – Detalhe dos elementos rolantes



Fonte: Strodox Tools Store

Figura 2.7 – Guia linear em perspectiva



Fonte: Strodox Tools Store

Na viga superior do portal foi instalada uma guia linear (figura 2.5), que se estende de uma extremidade à outra. Esse componente, semelhante a um trilho, tem a função de permitir o deslocamento horizontal dos pêndulos ao longo da estrutura de madeira. Essa característica possibilita a alteração das posições relativas entre os pêndulos, permitindo a observação de diferentes padrões oscilatórios quando essa condição é modificada.

A guia linear, com comprimento original de 1 metro, foi adquirida por meio do e-commerce *Aliexpress*. Para ajustar suas dimensões às proporções da viga superior, foi

necessário reduzir seu tamanho em 10 centímetros. Além da guia, foram adquiridos dois blocos deslizantes (figura 2.6) com sistema de bloqueio, que permitem tanto o movimento horizontal quanto a fixação precisa das posições desejadas. Os encoders estão fixados nesses blocos deslizantes, o que possibilita sua movimentação controlada e sua estabilização em pontos específicos, garantindo a flexibilidade e a precisão do experimento. A figura 2.8 fornece uma visão detalhada dos blocos deslizantes adquiridos.

Figura 2.8 – Bloco deslizante com sistema de travamento integrado.



Fonte: Strodox Tools Store

2.1.3 Encoder óptico

Um encoder óptico incremental é um dispositivo eletrônico utilizado para converter movimentos mecânicos em sinais digitais, permitindo a medição de variáveis como distâncias, velocidades, número de rotações, ângulos, entre outros. O funcionamento desse dispositivo baseia-se em um disco com marcações (pulsos), acompanhado por um emissor e um receptor de luz. À medida que o disco gira, os pulsos gerados são detectados pelo receptor, que os converte em sinais digitais passíveis de análise. Nas figuras 2.9, 2.10 e 2.11, é possível observar o conjunto de encoders empregados no aparato experimental.

Figura 2.9 – Encoders óptico rotativos com conectores e cabos destacados.



Fonte: Autoria própria

Figura 2.10 – Encoders óptico - especificações de conexão.



Fonte: Autoria própria

Figura 2.11 – Vista lateral dos encoders ópticos incrementais.



Fonte: Autoria própria

As especificações do modelo utilizado neste experimento são as seguintes:

- **Resolução:** 1000 p/r (100 pulsos por revolução em fase única);
- **Fonte de alimentação:** DC 5-24V;
- **Diâmetro do eixo:** 6 mm;
- **Comprimento do eixo:** 13 mm;
- **Dimensões:** 38 mm de diâmetro e 40 mm de altura (sem considerar o eixo);

- **Saída:** sinal de pulso ortogonal em duas fases (AB), com saída do tipo coletor aberto NPN;
- **Velocidade mecânica máxima:** 5000 rotações por minuto (R/min);
- **Frequência de resposta:** 0-20 kHz;
- **Comprimento do cabo:** 1,5 metros.

Neste experimento, foi necessário utilizar dois encoders ópticos incrementais, um para cada pêndulo, de forma a possibilitar a coleta de dados independentes para cada sistema oscilatório. Ambos os dispositivos foram adquiridos por e-commerce *Casa da Robótica* (www.casadarobotica.com), localizado no estado da Bahia. Essa escolha levou em consideração não apenas as especificações técnicas que atendem aos requisitos do experimento, mas também a confiabilidade e a acessibilidade do fornecedor.

2.1.4 Suporte em poliamida

Figura 2.12 – Suporte semicircular em Nylon para fixação precisa dos encoders.



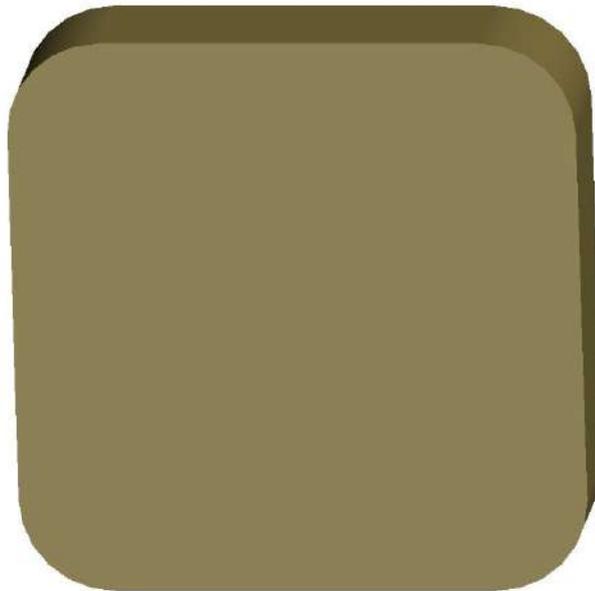
Fonte: Autoria própria

A fixação dos encoders ópticos ocorreu através de suportes semicirculares fabricados em poliamida, comercialmente conhecida como Nylon. A estrutura é composta por duas partes ajustáveis, fixadas entre si com parafusos metálicos, permitindo que o suporte seja preso firmemente em torno dos encoders, como pode ser visualizado na figura 2.12. O suporte apresenta um diâmetro de aproximadamente 10 centímetros e uma altura de 5 centímetros.

O material utilizado na fabricação pode ser o Nylon 6 (Poli(ϵ -caprolactama)) ou o Nylon 6,6 (Poli(hexametileno adipamida)), ambos amplamente empregados na manufatura subtrativa de peças mecânicas devido à sua excelente resistência mecânica, durabilidade e estabilidade dimensional.

2.1.5 Bloco de madeira

Figura 2.13 – Bloco de madeira utilizado como elemento de acoplamento entre suporte de poliamida e blocos deslizantes em AutoCAD.

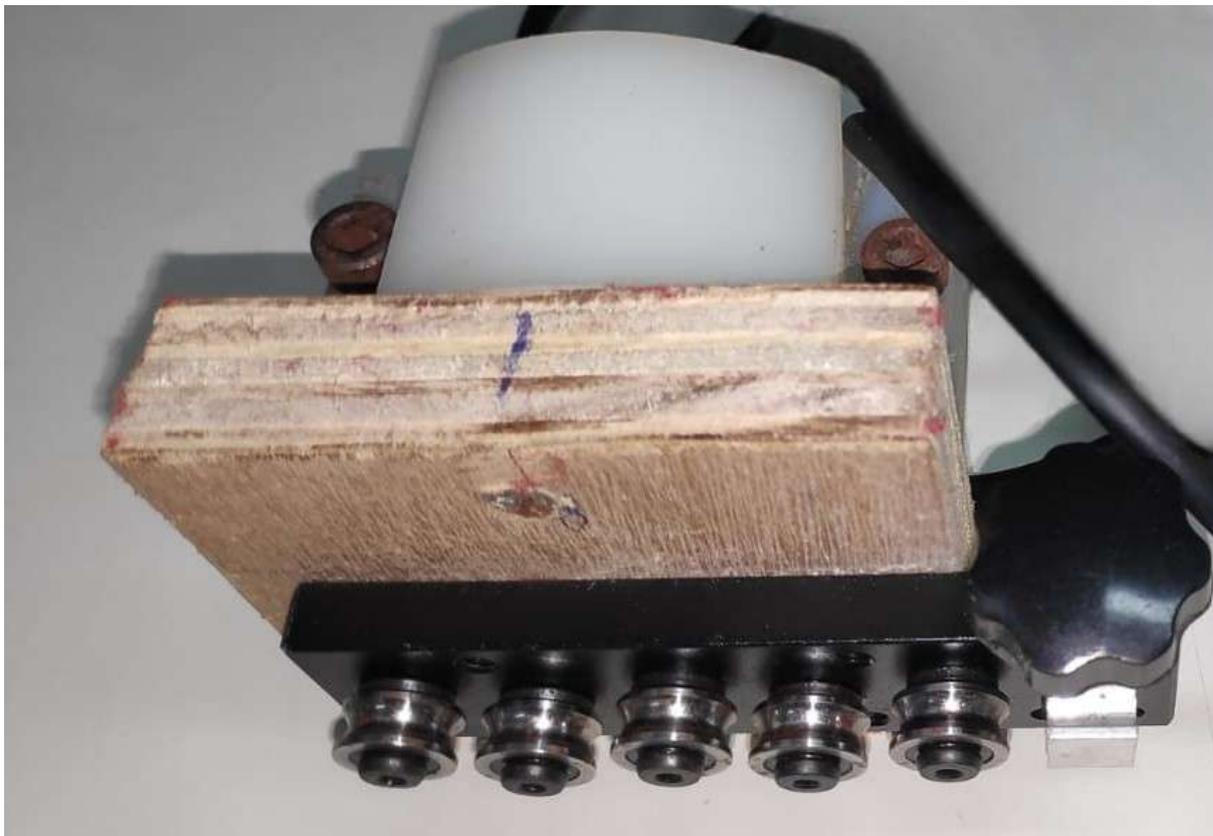


Fonte: Autoria própria

Para fixar os encoders ópticos aos blocos deslizantes, além dos suportes de poliamida, também foi necessária a utilização de blocos de madeira fabricados a partir de madeira compensada (ou MDF). Estes blocos possuem formatos quadrados, tendo 10 centímetros de lado e espessura de aproximadamente 1,5 centímetros. A figura 2.13 mostra o desenho em AutoCAD dessa peça.

Como é possível ver na figura 2.14, o acoplamento do bloco de madeira ao suporte de poliamida é mostrado na parte frontal, enquanto a conexão com o bloco deslizante está localizada na parte posterior. Ambas as peças foram fixadas utilizando parafusos metálicos, assegurando a rigidez estrutural e funcionalidade do conjunto.

Figura 2.14 – Bloco de madeira fixado ao bloco deslizante e ao suporte de poliamida através de parafusos metálicos



Fonte: Autoria própria

2.1.6 Hastes de acrílico

Figura 2.15 – Hastes de acrílico transparente.



Fonte: Autoria própria

A constituição dos pêndulos é composta por duas barras de acrílico, material plástico derivado de polímeros do ácido acrílico ou metacrílico, cada uma com 80 centímetros de comprimento. Essas barras são acopladas diretamente ao eixo dos encoders, permitindo a captação precisa do movimento mecânico e sua conversão em dados digitais. As hastes,

cujo desenho CAD foi realizado em Corel Draw e convertido em arquivo .obj, permitindo a leitura da cortadora, foram projetadas e fabricadas em acrílico com 8 milímetros de espessura, utilizando o corte a laser para garantir maior precisão dimensional. A estrutura das barras inclui quatro furos na parte superior, destinados à fixação dos flanges que as conectam aos encoders, e três furos na parte inferior, posicionados com espaçamento de 5 centímetros entre si, permitindo ajustes na posição da mola que as interliga. A figura 2.15 mostra as hastes de acrílico confeccionadas dispostas paralelamente sobre uma superfície. Na imagem, é possível ver os furos distribuídos ao longo de sua extensão inferior utilizados para o acoplamento da mola entre elas, bem como os da parte superior onde são acoplados os flanges na montagem, como é possível visualizar na imagem abaixo (figura 2.16).

Figura 2.16 – Hastes de acrílico com flanges metálicos.



Fonte: Autoria própria

2.1.7 Flanges e parafusos

Figura 2.17 – Flanges metálicos em perspectiva frontal e lateral, destacando os furos para fixação.

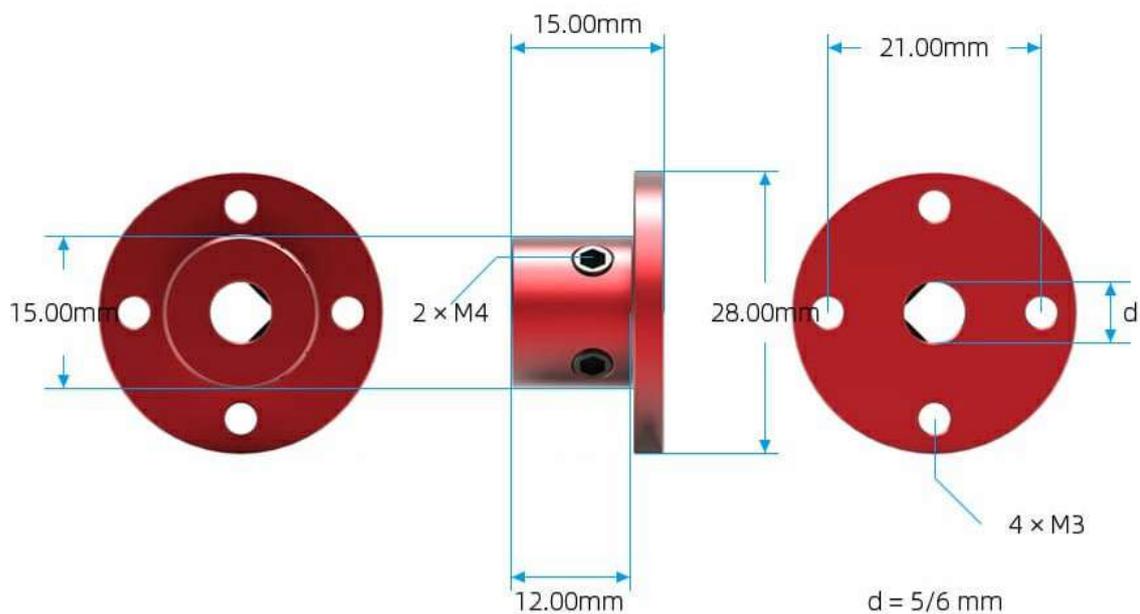


Fonte: Autoria própria

Para fixar as hastes aos encoders, foram utilizados flanges de alumínio, pequenas peças com orifícios centrais projetados para acoplamento a eixos como os presentes nos encoders. A fixação ocorre com parafusos perpendiculares ao corpo da peça, proporcionando estabilidade durante o funcionamento e maior precisão nas medidas. A figura 2.17 mostra as peças utilizadas no aparato.

Os flanges utilizados também foram adquiridos de forma online, através do e-commerce *Aliexpress*. A figura abaixo (figura 2.18) mostra as dimensões dos flanges utilizados.

Figura 2.18 – Dimensões dos flanges.



Fonte: GKTOOLS Official Store

Para conectar os flanges às hastes, foram utilizados parafusos de aproximadamente 2 centímetros de comprimento e 5 milímetros de diâmetro, acompanhados de porcas sextavadas, assegurando uma fixação firme e confiável (figura 2.19).

Figura 2.19 – Parafusos utilizados no acoplamento dos flanges às hastes.



Fonte: Autoria própria

2.1.8 Mola

Figura 2.20 – molas metálicas de diferentes tamanhos e espessuras utilizados no experimento.

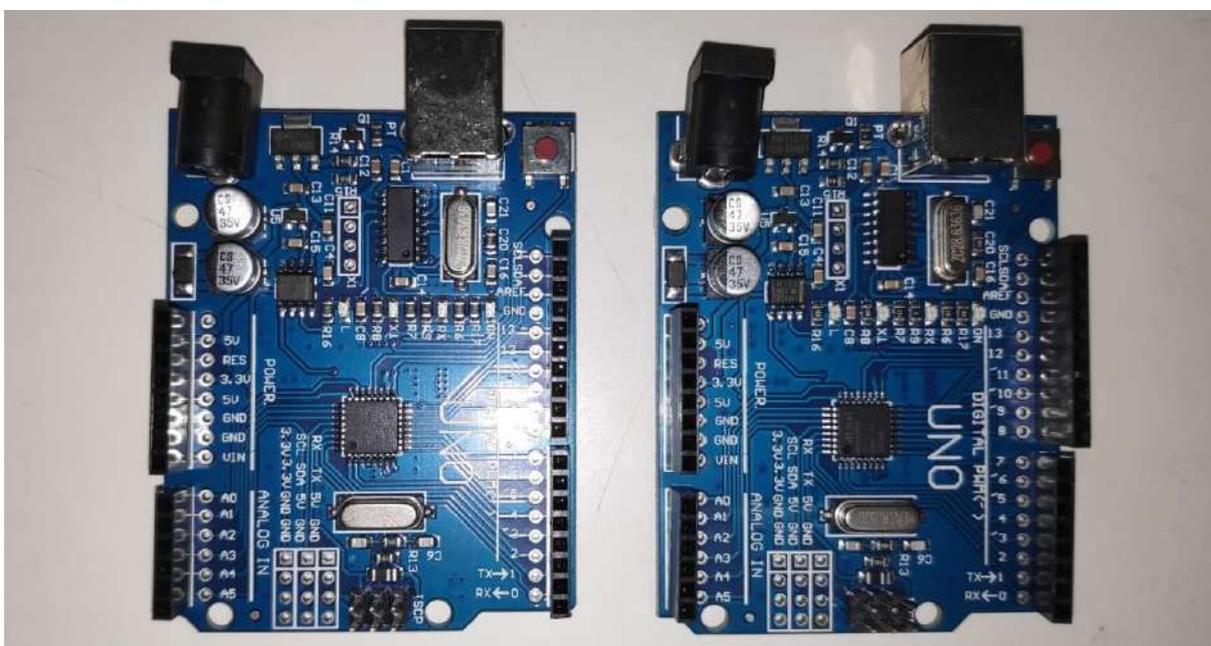


Fonte: Autoria própria

É um objeto elástico flexível de metal que tem como objetivo, nesse aparato, acoplar um pêndulo ao outro. Foram utilizadas três molas com comprimentos entre 30 e 50 centímetros, e diâmetros entre 1 e 2 centímetros, todas com leve constante elástica e construídas a partir de fios de cobre de aproximadamente 4 metros de comprimento e 1 milímetro de espessura. Graças à mobilidade permitida pelos blocos deslizantes, há a possibilidade de utilização de molas de diferentes comprimentos. A figura 2.20 mostra as molas utilizadas na aplicação do produto.

2.1.9 Placas Arduíno

Figura 2.21 – Microcontroladores Arduíno UNO, mostrando componentes eletrônicos como portas USB, pinos de entrada e saída, e conectores de alimentação.



Fonte: Autoria própria

o Arduíno é um microcontrolador programável de prototipagem eletrônica. Possui código aberto, o que possibilita a dinamização do seu uso. Ao receber o sinal do encoder óptico, converte e envia para a porta serial. Os dados dessa conversão podem ser visualizados em programas capazes de estabelecer comunicação serial ou mesmo no próprio monitor serial da IDE do Arduíno.

Essas placas são amplamente disponíveis no mercado, podendo ser adquiridas com facilidade em lojas de materiais eletrônicos ou plataformas de e-commerce. As especificações técnicas do modelo utilizado neste experimento estão detalhadas a seguir:

- **Microcontrolador:** ATmega328P (28 pinos);
- **Tensão de operação:** 5V;
- **Tensão de entrada (recomendada):** 7-12V;

- **Pinos digitais de entrada/saída (I/O):** 14 (dos quais 6 podem ser usados como saídas PWM);
- **Pinos analógicos:** 6;
- **Corrente máxima por pino I/O:** 20 mA;
- **Memória flash:** 32 KB (dos quais 0,5 KB usados pelo bootloader);
- **SRAM:** 2 KB;
- **EEPROM:** 1 KB;
- **Velocidade do clock:** 16 MHz;
- **Conectividade USB:** Tipo B (para comunicação e alimentação);
- **Conector de energia:** Barril de 2,1 mm (centro positivo);
- **Conector ICSP:** Para gravação do firmware no microcontrolador;
- **Dimensões:** 68,6 mm x 53,4 mm;

2.1.10 Cabos USB

Figura 2.22 – Cabos USB tipo B



Fonte: A autoria própria

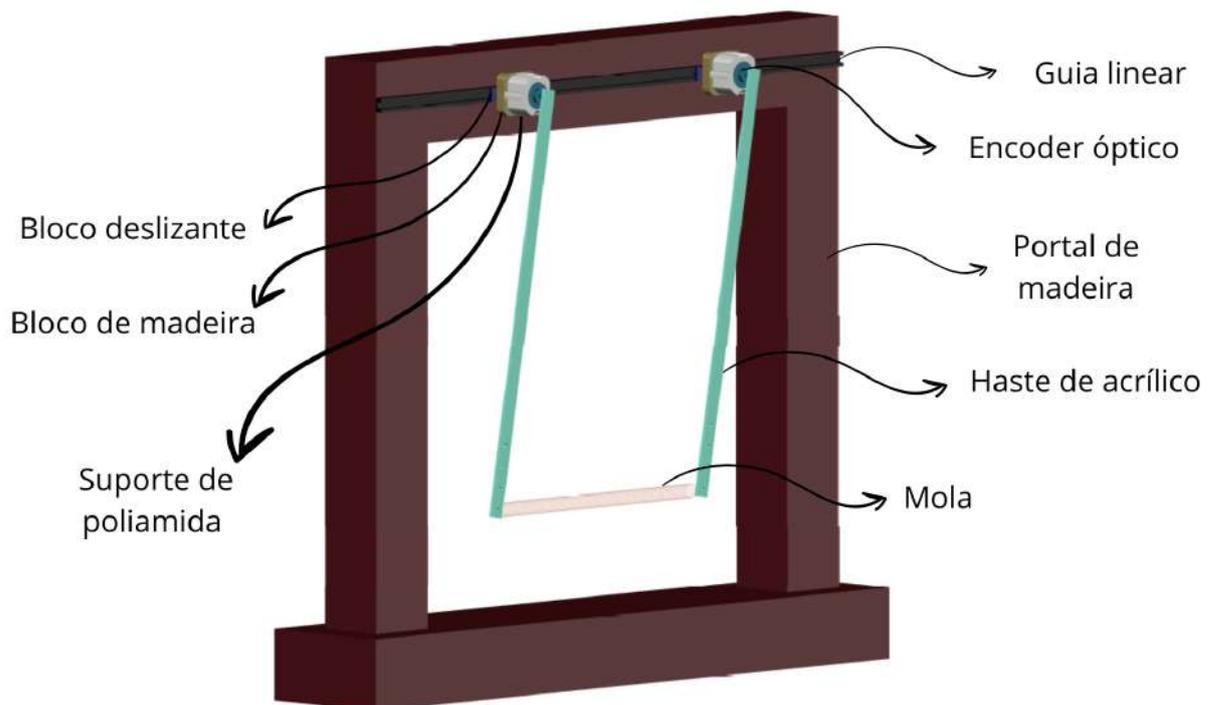
Foram utilizados dois cabos USB tipo B de 1,5 metros cada (figura 2.22), para conectar as placas Arduino ao computador. Os cabos têm por função transmitir os dados entre os dispositivos utilizados no aparato.

2.2 Montagem e Estrutura

A montagem do sistema experimental foi projetada para garantir simplicidade, funcionalidade e precisão na realização dos experimentos. A configuração busca facilitar o manuseio do aparato, proporcionando praticidade sem comprometer a confiabilidade da coleta de dados.

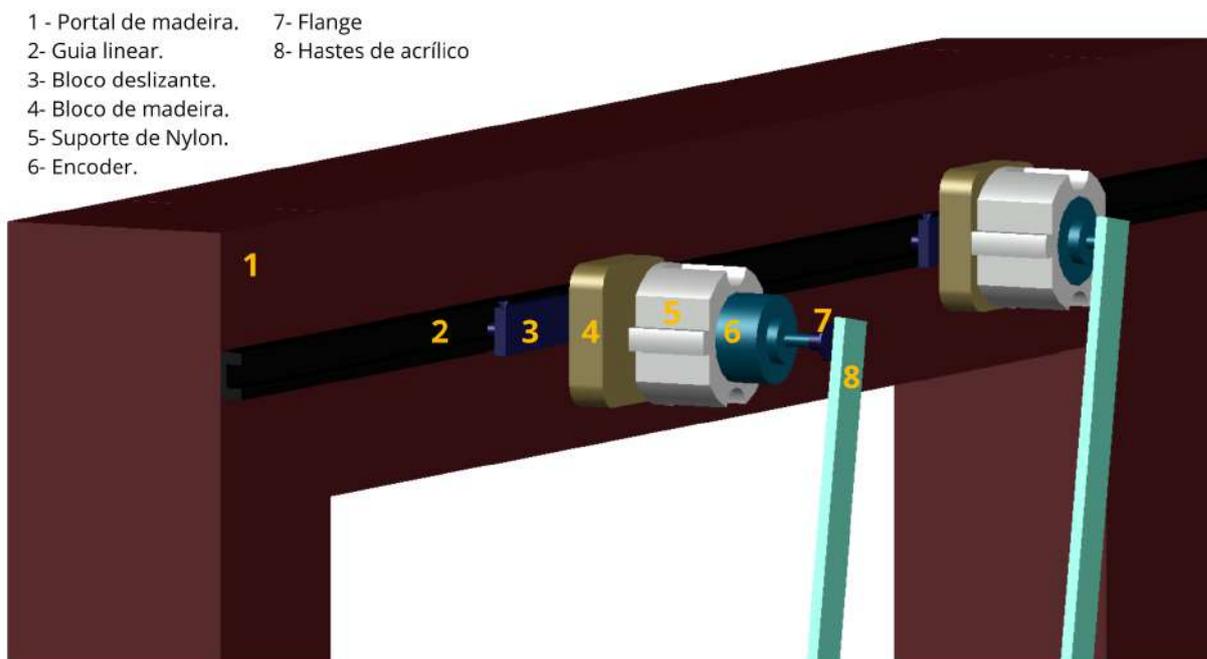
As Figuras 2.23 e 2.24 apresentam o esquema projetado da estrutura do sistema físico com indicação das principais peças constituintes, elaborado utilizando o software de desenho técnico AutoCAD. Esse esquema fornece uma visão clara e precisa dos componentes e da disposição geométrica do sistema, servindo como base para sua construção e montagem.

Figura 2.23 – Estrutura física em AutoCAD com indicação dos principais elementos.



Fonte: Autoria própria

Figura 2.24 – Representação ampliada da estrutura física com foco nos principais componentes.



Fonte: Autoria própria

Este tópico descreve de forma detalhada o processo de montagem, abordando o posicionamento dos componentes, as conexões necessárias entre eles e os ajustes que garantem o funcionamento adequado.

2.2.1 Etapa 1 - Fixação da guia ao portal

Figura 2.25 – Guia linear fixada ao portal de madeira.



Fonte: Autoria própria

Figura 2.26 – Detalhe lateral da montagem da guia linear sobre portal de madeira.



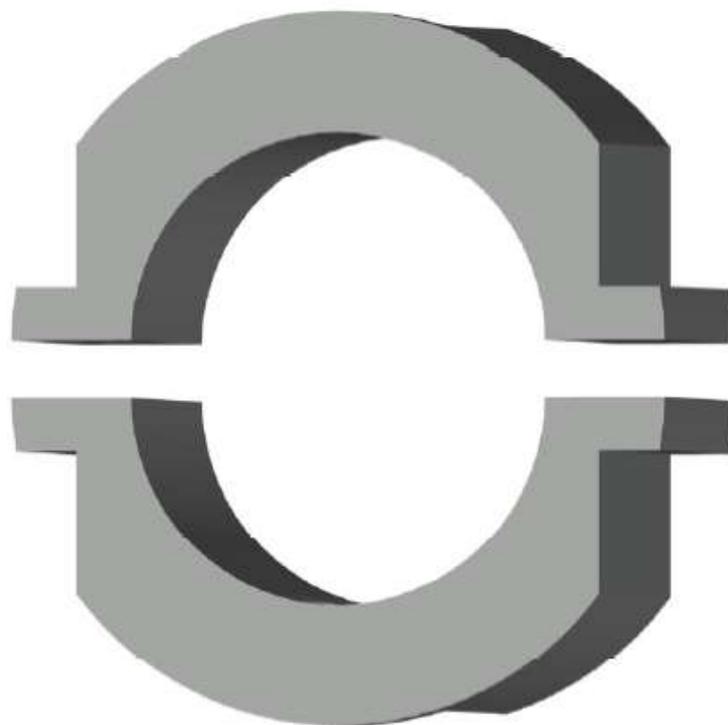
Fonte: Autoria própria

A primeira etapa da montagem do equipamento envolve a fixação da guia linear ao portal de madeira. Para facilitar esse processo, a guia linear possui furos distribuídos ao longo de sua extensão, conforme ilustrado nas Figuras 2.25 e 2.26. Para garantir estabilidade e segurança na montagem, foram utilizados parafusos como elemento de fixação.

2.2.2 Etapa 2 - Acoplamento dos encoders aos blocos deslizantes

Os encoders ópticos foram fixados à guia linear, que, por sua vez, está presa ao portal de madeira. Para essa montagem, foram utilizados suportes de poliamida (mostrado na figura 2.12), fabricados em uma tornearia, com base em especificações elaboradas previamente em desenho técnico (figura 2.27). Esses suportes possuem cerca de 10 centímetros de diâmetro e 5 centímetros de altura, dimensões projetadas para atender às necessidades do sistema. Cada suporte foi dividido em duas partes, permitindo o encaixe preciso e seguro dos encoders. Após o encaixe, as duas metades foram unidas novamente por parafusos.

Figura 2.27 – Suporte para os encoders.



Fonte: Autoria própria

Os suportes de poliamida foram fixados a blocos de madeira MDF, confeccionados em uma marcenaria. Cada placa possui formato quadrado com aproximadamente 10 centímetros de lado. Essas placas foram acopladas ao bloco deslizante da guia linear (figura 2.14), utilizando parafusos, permitindo uma movimentação suave e controlada.

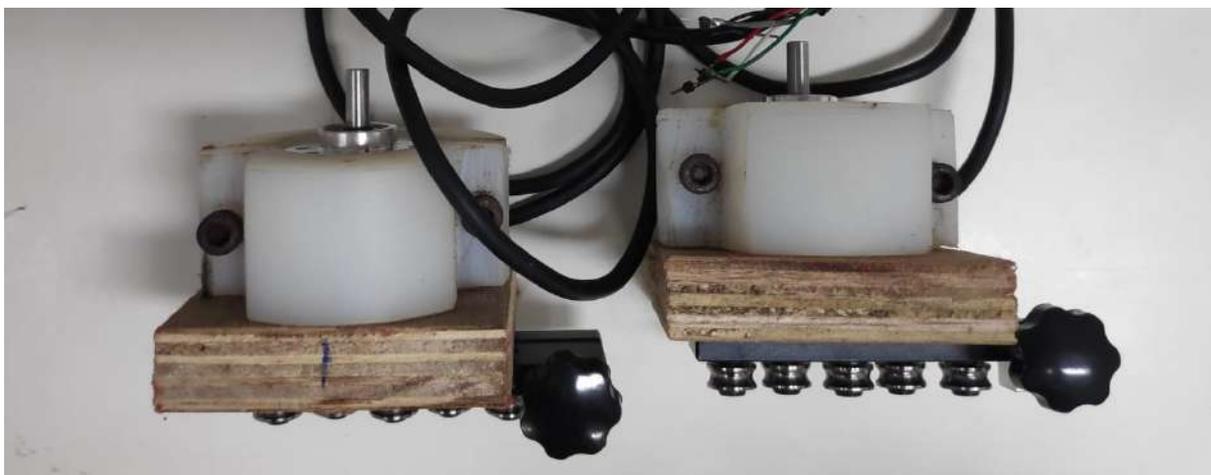
As Figuras 2.28, 2.29 e 2.30 apresentam a organização detalhada desses elementos, destacando sua disposição no sistema e evidenciando como cada componente contribui para o funcionamento eficiente do aparato experimental.

Figura 2.28 – Acoplamento dos encoders aos blocos deslizantes.



Fonte: Autoria própria

Figura 2.29 – Acoplamento dos encoders aos blocos deslizantes - vista superior dos componentes.



Fonte: Autoria própria

Figura 2.30 – Acoplamento dos encoders aos blocos deslizantes - vista frontal e posterior.



Fonte: Autoria própria

Feito o acoplamento, os blocos deslizantes foram restituídos à guia linear. A figura 2.31 mostra a disposição desses elementos fixos ao portal de madeira.

Figura 2.31 – Montagem dos encoders ópticos na guia linear.

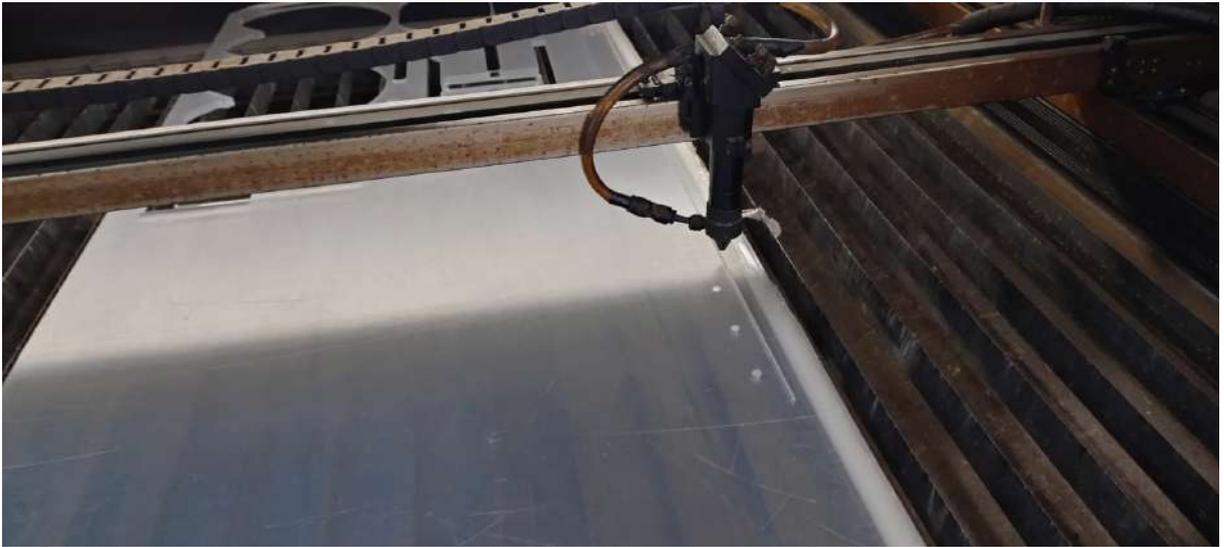


Fonte: Autoria própria

2.2.3 Etapa 3 - Montagem das hastes

Conforme mencionado anteriormente, a concepção dos pêndulos contou com a utilização de duas hastes de acrílico, cada uma com 80 centímetros de comprimento. Essas hastes foram projetadas e fabricadas por meio de corte a laser, conforme ilustrado na figura 2.32. Esse método de fabricação foi escolhido por sua alta precisão, assegurando dimensões exatas e acabamento de qualidade, essenciais para o desempenho adequado do sistema experimental.

Figura 2.32 – Hastes de acrílico sendo manufaturadas na cortadora laser.



Fonte: Autoria própria

A fixação das hastes aos encoders é realizada por meio dos flanges de alumínio descritos no tópico 2.1.7. A Figura 2.33 ilustra a disposição detalhada dos flanges, hastes e parafusos, destacando como esses elementos foram organizados.

Figura 2.33 – Hastes acopladas aos flanges por parafusos.

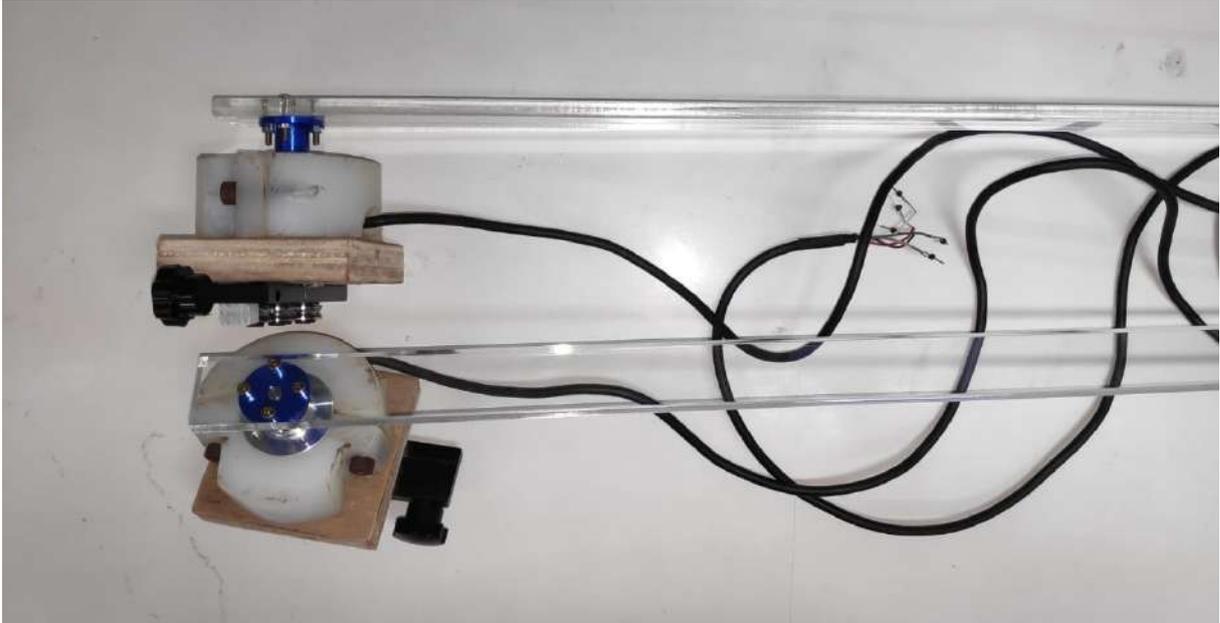


Fonte: Autoria própria

Os flanges foram acoplados ao eixo dos encoders utilizando parafusos reguladores,

inseridos nos orifícios integrados à estrutura dos próprios flanges. Essa configuração assegura um ajuste preciso e firme, como é visto na imagem 2.34.

Figura 2.34 – Hastes acopladas aos encoders.



Fonte: Autoria própria

2.2.4 Etapa 4 - Posicionamento da mola

A última etapa antes da inclusão dos elementos eletrônicos é o posicionamento da mola que conecta os dois pêndulos. Para isso, as hastes foram projetadas com pequenos orifícios em suas extremidades, especialmente concebidos para acomodar a mola e viabilizar o acoplamento. A mola utilizada pode ter tamanhos variados, pois as hastes deslizam nos trilhos, permitindo ajustar a distância entre elas de 0 a 90 centímetros.

Recomenda-se a utilização de molas com diferentes tamanhos, diâmetros e constantes elásticas, ampliando as possibilidades experimentais e permitindo a exploração de uma maior variedade de cenários físicos. A configuração final dessa etapa estrutural, antes da inclusão dos componentes eletrônicos, é apresentada nas figuras 2.35 e 2.36.

Figura 2.35 – Disposição final dos componentes mecânicos.



Fonte: Autoria própria

Figura 2.36 – Vista lateral da estrutura de madeira com os elementos inseridos .

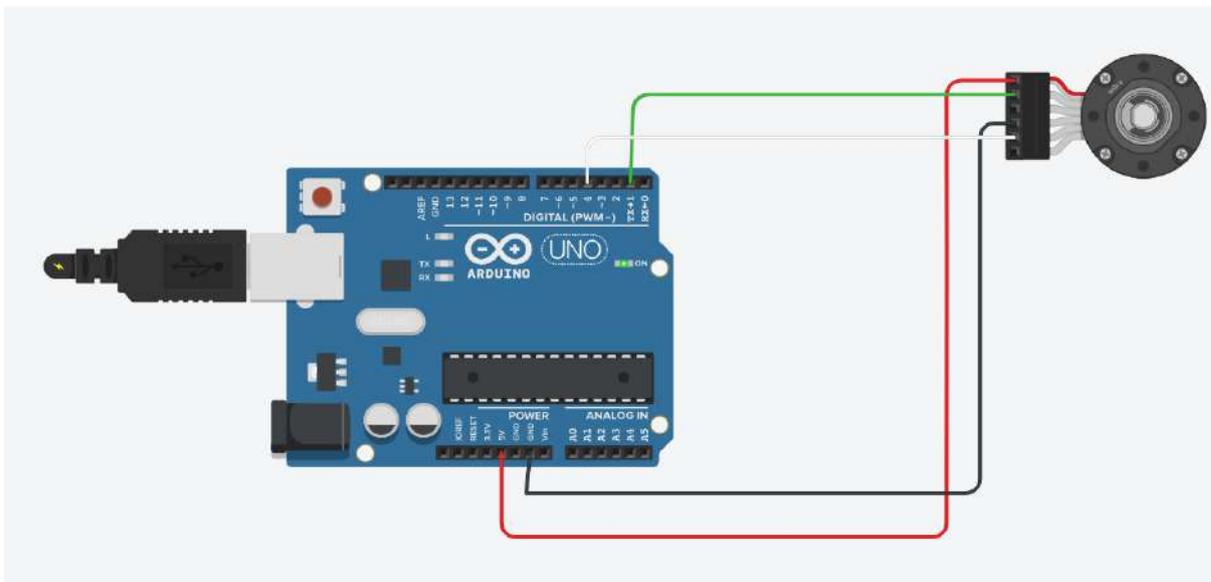


Fonte: Autoria própria

2.2.5 Etapa 5 - Conexão das placas Arduíno

A conexão da placa Arduíno ao encoder ocorre através dos próprios fios do encoder, sem a necessidade de mecanismos intermediários, como protoboards. A imagem 2.37 mostra uma esquematização de como ocorrem essas conexões.

Figura 2.37 – Ligação entre encoder e placa Arduino.

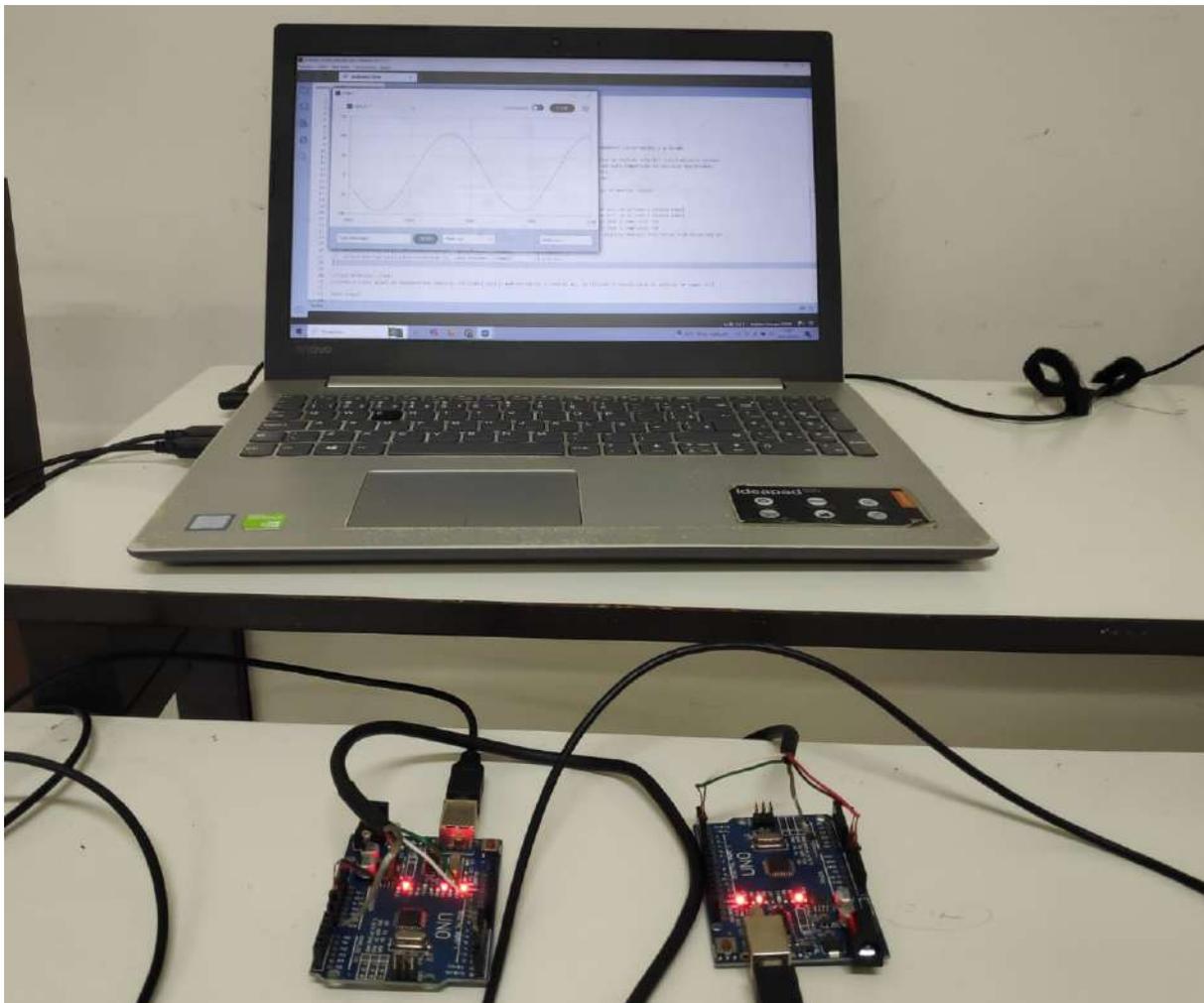


Fonte: Autoria própria

O fio vermelho (VCC ou +5V/+24V) fornece a alimentação elétrica ao encoder, ou seja, é responsável por energizar o dispositivo. Esse fio é conectado ao pino 5V da placa Arduino. O fio preto (GND) serve como referência de terra para o circuito, devendo ser conectado ao terra (GND) do sistema para completar o circuito de alimentação elétrica. O fio branco (canal A) emite pulsos digitais que indicam o deslocamento angular do eixo no primeiro canal de saída. Esses pulsos são usados para determinar o movimento e a velocidade do eixo. Esse fio deve ser conectado a um dos pinos digitais com capacidade de interrupção, como os pinos 2 ou 3 no Arduino, para monitorar os pulsos do encoder em tempo real. Esse pino é definido no código. Por fim, o fio verde (canal B) tem a função de fornecer pulsos deslocados em 90° em relação ao canal A, permitindo identificar a direção do movimento. A combinação dos sinais dos canais A e B possibilita detectar o sentido de rotação do eixo. Esse fio deve ser conectado a outro pino digital, que também pode ser lido pelo Arduino e estará definido no código.

Feita a conexão dos encoders às placas Arduino, estas são conectadas ao computador através dos cabos USB tipo B (figura 2.22). A figura 2.38 mostra o *setup* experimental envolvendo a conexão entre o computador e as duas placas Arduino.

Figura 2.38 – *Setup* experimental com Arduino para coleta automatizada de dados do sistema oscilatório desenvolvido.



Fonte: Autoria própria

Finalizando esta etapa, o equipamento está pronto para o uso. A visualização gráfica dos dados pode ser realizada na própria ferramenta integrada à IDE do Arduino, o Serial Plotter. No entanto, existem softwares com interfaces melhoradas que podem ser utilizados para esta função e que podem atuar em conjunto com a IDE, como o software de programação gráfica LabVIEW. Esses softwares são detalhados na seção seguinte.

3 AUTOMAÇÃO DA AQUISIÇÃO DE DADOS

A revolução tecnológica vivida nos últimos anos transformou o *modus operandi* dos principais setores da sociedade. A integração de mecanismos que facilitam a vida humana ou otimizam seus esforços tornou-se uma realidade. Na indústria, por exemplo, os processos de produção estão passando por uma transição. Alguns ainda são operados manualmente, enquanto outros seguem o caminho inevitável da automação (RIFKIN, 2011).

Um processo automatizado pode ser entendido como um sistema operacional que requer pouca ou nenhuma intervenção humana. Nesses sistemas físicos, são utilizados atuadores, controladores e sensores para desenvolver tarefas que, muitas vezes, são repetitivas ou exigem um nível de precisão que o ser humano não é capaz de alcançar. Outro aspecto que justifica a automação de processos é a eficiência e segurança na realização das tarefas. Um processo automatizado, quando operado sob parâmetros precisos, não abre margem para as incorreções típicas da atividade humana (GROOVER, 2016).

Na indústria, a automação dos sistemas de produção pode ser agrupada em duas categorias: automação da própria produção e informatização dos sistemas de apoio à produção. Apesar dessa divisão, as duas categorias estão intimamente relacionadas, visto que os sistemas de produção fabris automatizados na operação são implementados por sistemas informatizados, e estes, por sua vez, são incorporados aos sistemas de apoio à produção (LEE; BAGHERI; KAO, 2015).

Para além da indústria, a automação dos processos está presente em áreas que demandam a coleta de dados precisos para análise e controle, como em pesquisas científicas, onde é indispensável para garantir a precisão e a reprodutibilidade dos experimentos. Muitos desses métodos de automação começam na própria instrumentação, que se caracteriza pelo uso de dispositivos para realizar medições, monitoramento e controle das variáveis mensuradas. Esses mecanismos instrumentais, assim como todo o processo de automação, integram sensores, controladores, transdutores e outros dispositivos semelhantes (DOEBELIN; MANIK, 2007).

3.1 Hardware e Software

Esta seção apresenta os componentes físicos e as ferramentas digitais utilizadas no desenvolvimento e funcionamento do sistema experimental. Nessa abordagem, detalha-se o hardware empregado (sensores e microcontroladores) e demais elementos estruturais, bem como os softwares responsáveis pela aquisição automática de dados, simulação computacional e controle do sistema. Essa integração entre hardware e software é essencial para garantir precisão, funcionalidade e eficiência nos experimentos realizados, além de proporcionar uma interface acessível para o usuário.

3.1.1 Hardware

O aprimoramento da visualização de fenômenos físicos está intimamente relacionado ao desenvolvimento de tecnologias acessíveis e de fácil manuseio. Com a automatização da aquisição de dados, é possível realizar uma análise detalhada e precisa, já que a captação pode ocorrer em tempo real, permitindo o ajuste das informações de acordo com os parâmetros estabelecidos dos osciladores.

A automação de sistemas pendulares acoplados pode ser realizada utilizando sensores disponíveis no mercado, que possuem preços acessíveis e ampla compatibilidade com mecanismos de aquisição de dados. Os encoders ópticos incrementais são exemplos de mecanismos que desempenham essa função, pois são capazes de captar fenômenos físicos, como posição, direção, velocidade linear e angular, entre outros (BISINOTTO; CANCIAN; DE OLIVEIRA, 2015).

3.1.1.1 *Funcionamento do encoder óptico incremental*

Quando se busca controle e precisão em sistemas automáticos, os encoders ópticos incrementais são uma escolha viável, especialmente para análise de posições ou movimentos angulares. Sua função principal é converter sinais mecânicos lineares ou rotativos em pulsos analógicos ou digitais. São amplamente utilizados para medir rotações por minuto (RPM) de motores elétricos, como motores de passo, e também para monitorar posição, velocidade, movimento e direção em outros dispositivos (FERRAZ; OLIVEIRA JUNIOR, 1992). A figura 3.1 mostra um encoder incremental óptico de 1000 pulsos.

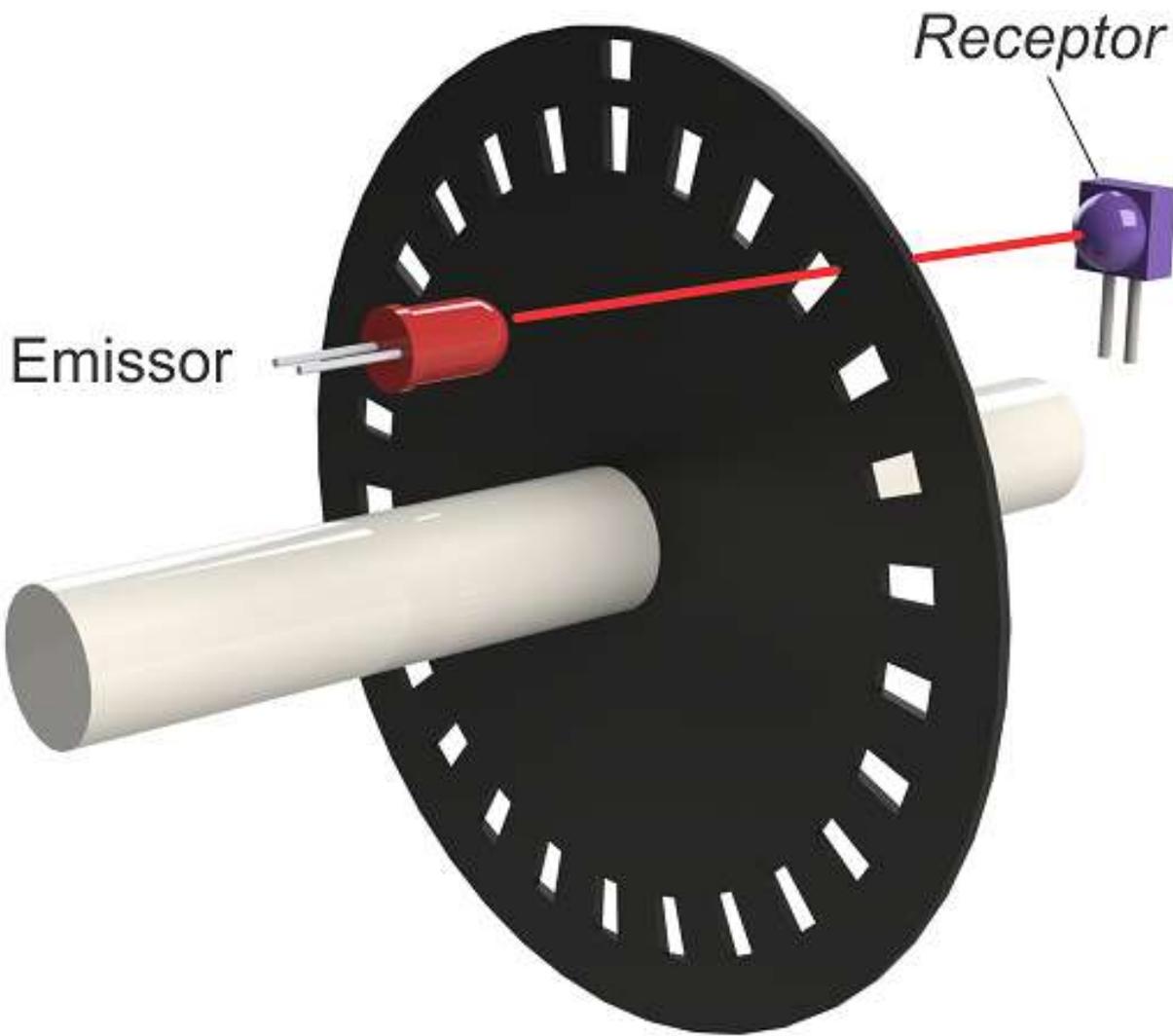
Figura 3.1 – Encoder incremental óptico.



Fonte: Autoria própria

Esse mecanismo é composto, basicamente, por um disco com marcações que bloqueia ou libera o feixe de luz de um LED para o fotodetector, o qual inclui um emissor e um receptor (figura 3.2). As marcações no disco estão relacionadas à resolução do equipamento, pois, à medida que o disco gira, um sinal em forma de onda quadrada (clock) é enviado pelo fotodetector e pelo circuito eletrônico para as saídas do encoder. Esse sinal é proporcional ao número de marcações no disco, determinando sua resolução. A quantidade de pulsos está diretamente relacionada à precisão na captura da posição. No entanto, fatores como erro de excentricidade, desalinhamento do sensor, variações na largura das marcações do disco, ruído eletrônico e interferências ópticas podem introduzir erros sistêmicos na medição. Nessas condições, mesmo uma alta resolução não será suficiente para corrigir tais imprecisões. (INÁCIO, 2009).

Figura 3.2 – Elementos constituintes do encoder.



Fonte: HI Tecnologia

Na figura 3.3 é possível visualizar alguns exemplos de discos e sua quantidade de marcações (pulsos). Esse valor faz referência ao número de pulsos elétricos gerados a cada rotação completa em torno do eixo no qual o encoder está instalado.

Figura 3.3 – Resoluções de encoders.

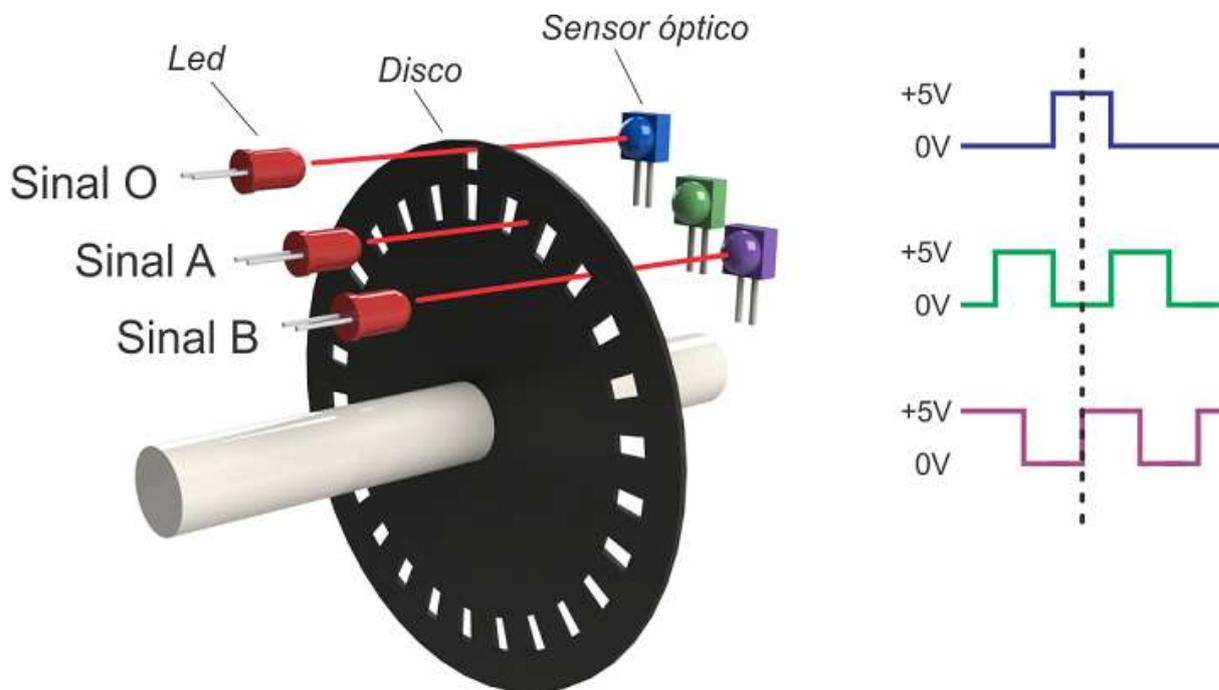


Fonte: HI Tecnologia

A particularidade dos encoders ópticos incrementais, amplamente utilizados, reside

nas suas múltiplas saídas. Os modelos mais comuns possuem três saídas: “A”, “B” e “O”. Essas saídas estão associadas, respectivamente, ao ângulo de rotação, medido pelos pulsos conforme o disco gira, ao sentido da rotação, com defasagem angular de $\pm 90^\circ$, e à indicação de quando uma volta se encerra e outra começa (TIAGO, 2013). A figura 3.4 mostra a estrutura esquematizada dos principais elementos desse tipo de encoder.

Figura 3.4 – Estrutura do encoder óptico incremental.



Fonte: HI Tecnologia

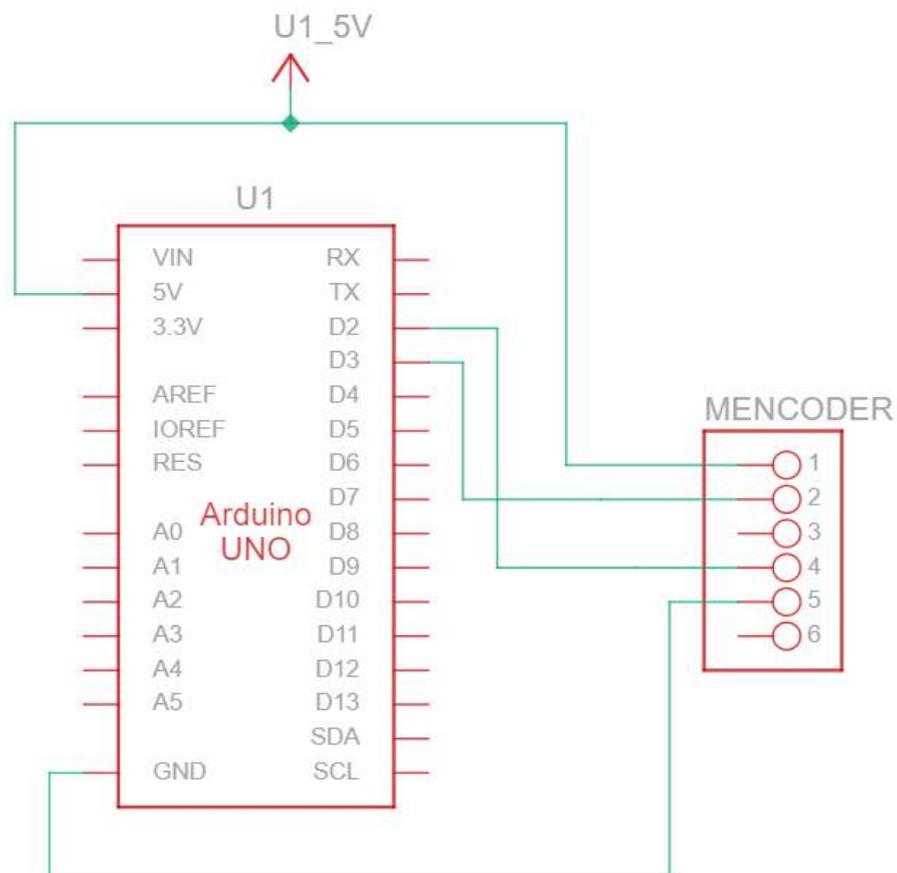
3.1.1.2 Placa Arduino UNO e microcontrolador

A placa programadora Arduino é uma plataforma *open-source*, o que permite que qualquer indivíduo possa contribuir com o seu desenvolvimento. Seu código fonte está disponível publicamente e a programação física baseada em uma placa com microcontrolador simples, garante uma democratização de objetivos desejados pelos utilizadores por benefícios que incluem não somente a customização do código, mas também colaboração entre desenvolvedores, transparência e custo. A vasta compatibilidade com sensores e interruptores permite que a placa Arduino seja utilizada no desenvolvimento de objetos interativos e atue na visualização e controle de fenômenos associados ao funcionamento de motores, luzes, entre outros dispositivos físicos. Desta forma, é possível constatar as potencialidades integrativas entre computador e mundo físico obtidas a partir dessa ferramenta poderosa e versátil (SILVA; ARAUJO; CAVALCANTE, 2019).

Para realizar medidas comportamentais de osciladores acoplados, por exemplo, a placa programável Arduino recebe os sinais gerados pelo encoder a partir da movimentação dos pêndulos. A partir desses dados, ela é capaz de monitorar as posições angulares em tempo real. Com base nas informações obtidas, é possível analisar o comportamento completo do sistema, como velocidade, variações de ângulo, frequência e as características específicas do acoplamento.

No geral, os encoders ópticos incrementais possuem 4 ou 5 pinos e a ligação entre o sensor e a placa Arduino é bastante intuitiva. A figura 3.5 mostra uma esquematização de como ocorre a conexão entre a plataforma Arduino e o encoder. Como já mencionado no tópico 2.2.5, o pino VCC (Voltage at the Common Collector) é responsável pela alimentação do circuito. Normalmente, apresenta uma tensão de 5V e é ligado diretamente à placa. Já o terra, utilizado como ponto de referência de tensão, é ligado na porta GND. Os canais A e B são responsáveis pela captação da rotação do eixo do encoder; quando o movimento acontece, enviam pulsos indicando a orientação do giro. Esses pinos são ligados aos canais digitais da placa Arduino responsáveis pela leitura dos pulsos recebidos.

Figura 3.5 – Vista esquemática do circuito.



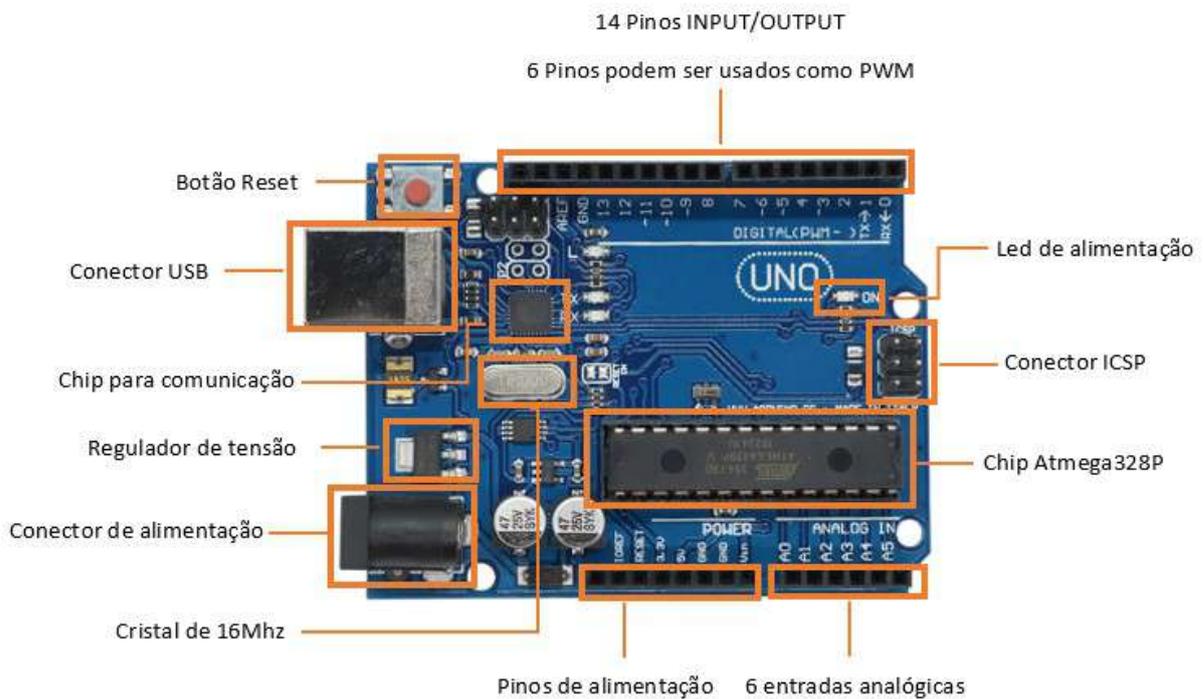
Fonte: Autoria própria

O componente principal da placa Arduino é o microcontrolador central, além dos pinos de entrada/saída analógicos e digitais, o que permite a comunicação com uma grande variedade de sensores. O Arduino UNO, um dos modelos mais utilizados atualmente, por exemplo, utiliza um controlador ATmel ATmega328p, um dispositivo de 8 bits da classe AVR, com "arquitetura RISC avançada e encapsulamento DIP28." Ele conta com 32 kB de Flash (sendo 512 bytes utilizados pelo bootloader), 2 kB de RAM e 1 kB de EEPROM (MICROBERTS, 2015).

A plataforma possui hardware open source, permitindo que qualquer pessoa crie seu próprio dispositivo Arduino, podendo modificá-lo ou adaptá-lo conforme suas necessidades. O software utiliza uma linguagem baseada em C/C++ e conta com uma interface simplificada (IDE), o que possibilita o desenvolvimento e a execução do código diretamente na placa (MCROBERTS, 2015).

A figura 3.6 mostra os principais elementos de uma placa de prototipagem Arduino, modelo UNO.

Figura 3.6 – Placa Arduino UNO.



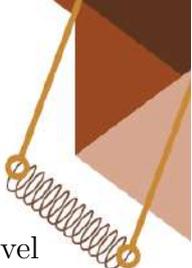
Fonte: Embarcados

3.1.2 Software

O desenvolvimento de sistemas experimentais modernos não se limita à utilização de componentes físicos; o software desempenha um papel igualmente crucial ao proporcionar ferramentas para aquisição, processamento e análise dos dados coletados. A programação personalizada permite não apenas automatizar tarefas, mas também adaptar os parâmetros de medição às necessidades específicas do experimento. Nesse contexto, plataformas como o Arduino, associadas a linguagens de programação como Python, oferecem recursos versáteis para integrar hardware e software, garantindo precisão e eficiência nos experimentos realizados.

3.1.2.1 Linguagem desenvolvimento Python

A linguagem de programação Python é amplamente utilizada em aplicações práticas na área acadêmica e fora dela. Isso se dá, principalmente, devido à sua versatilidade e



simplicidade de utilização. Trata-se de uma linguagem de código aberto de alto nível com sintaxe intuitiva, o que beneficia seu aprendizado e implementação, especialmente em ambientes educacionais. Essa ferramenta possui uma vasta biblioteca de pacotes que acarreta na ampliação de possibilidades como simulações numéricas e visualizações gráficas que, associadas à experimentação, podem representar um artifício poderoso para a observação de fenômenos e análise de dados.

Criada no final da década de 1980 pelo programador holandês Guido Van Rossum, funcionário do Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) em Amsterdã, a linguagem de programação Python surgiu com a proposta inicial de ser uma linguagem de código aberto, de fácil leitura e escrita. A primeira versão foi lançada em fevereiro de 1991 e tinha como inspiração a linguagem de ensino ABC, a linguagem C, Perl e Lisp no intuito de unir simplicidade e poder de expressão. (ROSSUM, s.d.)

A simplicidade proposta na criação da linguagem Python tinha por intuito a descentralização dos esforços, geralmente associados à complexidade da sintaxe, e na concentração maior na resolução de problemas. O termo Python, tem origem curiosa, é inspirado no programa de TV da BBC intitulado “Monty Python’s Flying Circus”, um humorístico do qual Guido Van Rossum era um grande fã. (VAN ROSSUM et al., 2007)

Atualmente o Python segue em constante evolução, apoiado por diversos colaboradores e mantido pela Python Software Foundation (PSF), uma organização sem fins lucrativos que fomenta a evolução da linguagem e suas diversas aplicações. A diversidade de pacotes disponíveis e compatíveis à linguagem Python possibilita a aplicação em áreas diversas como automação, inteligência artificial, ciência de dados e desenvolvimento web. (VAN ROSSUM; DRAKE JR, 1995)

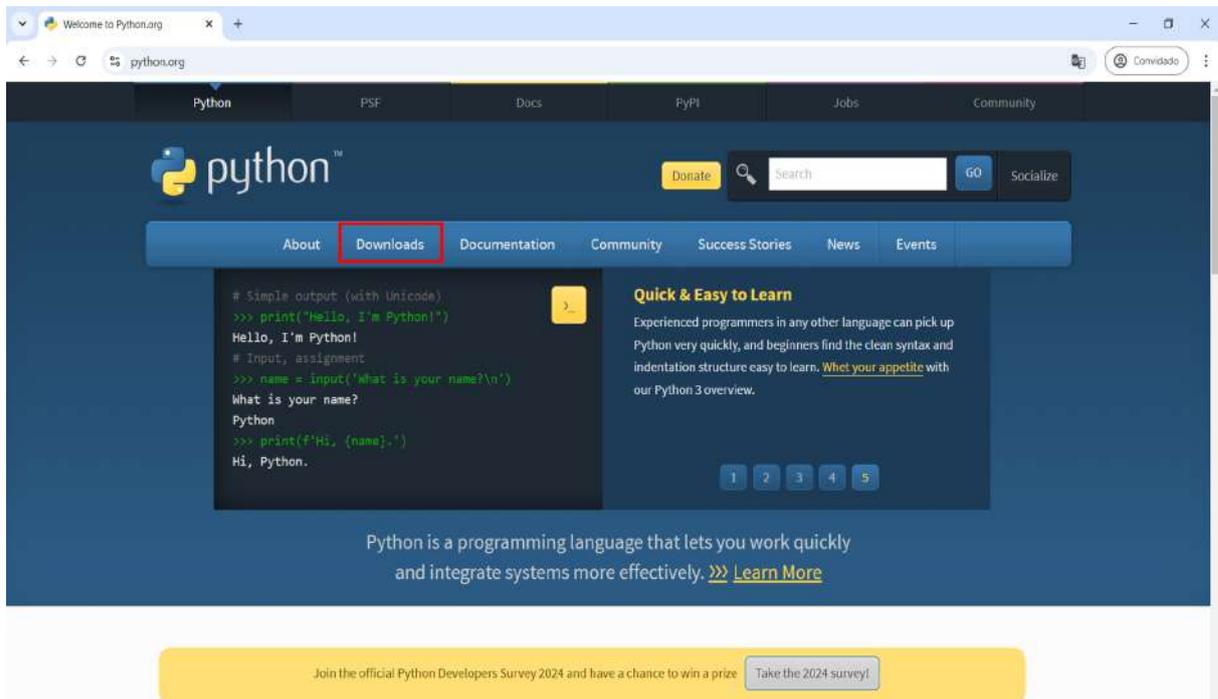
3.1.2.1.1 Instalando o Python no computador

A instalação do Python é bastante intuitiva e não requer grandes habilidades para ser realizada. Basta seguir os seguintes passos:

- 1º passo: acessar o site oficial da Python Software Foundation.

Em um computador, com acesso à internet, é necessário acessar o endereço da Python Foundation (<https://www.python.org/>). Após o acesso, será exibida a home page da fundação (figura 3.7). A partir daí, basta seguir os passos seguintes.

Figura 3.7 – Home page da Python Foundation.

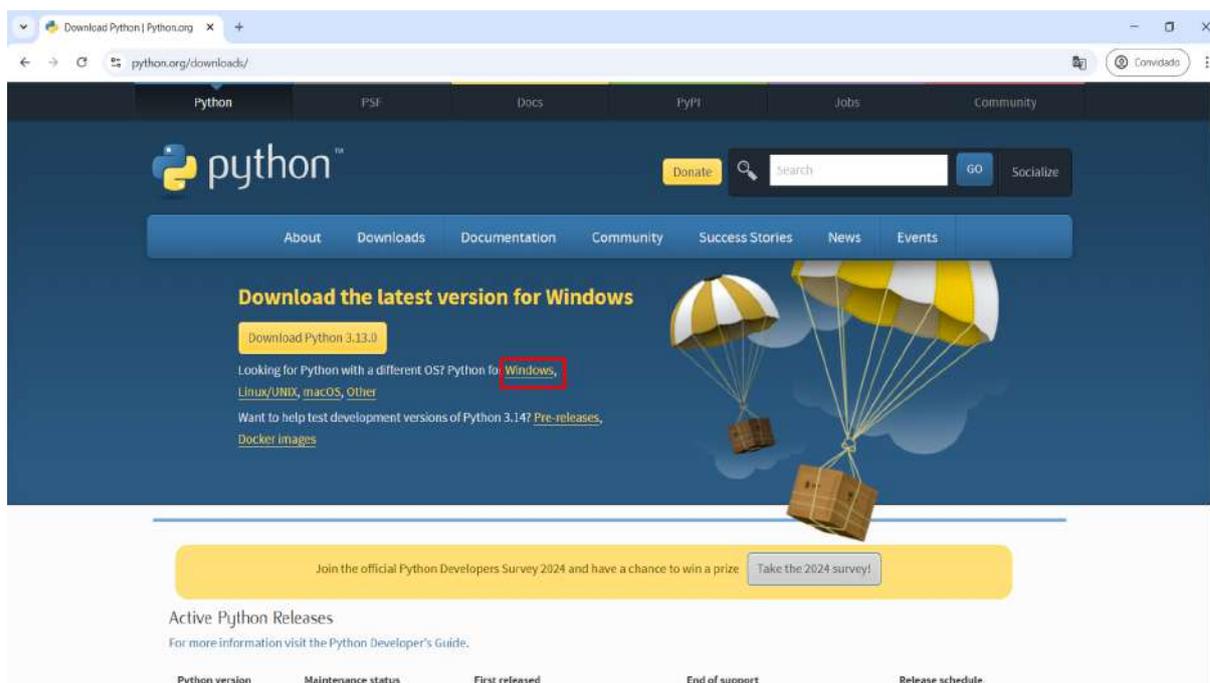


Fonte: Autoria própria

- 2º passo: Escolher o software de acordo com o sistema operacional do computador em que se deseja instalar o Python.

Ao clicar em download na tela inicial, o usuário é direcionado à tela seguinte onde é possível escolher o sistema operacional ao qual deseja instalar o programa (figura 3.8). Para esse tutorial, será utilizado um computador com sistema Windows, mas há disponibilidade para Linux, macOS e outros.

Figura 3.8 – Sistemas operacionais disponíveis.

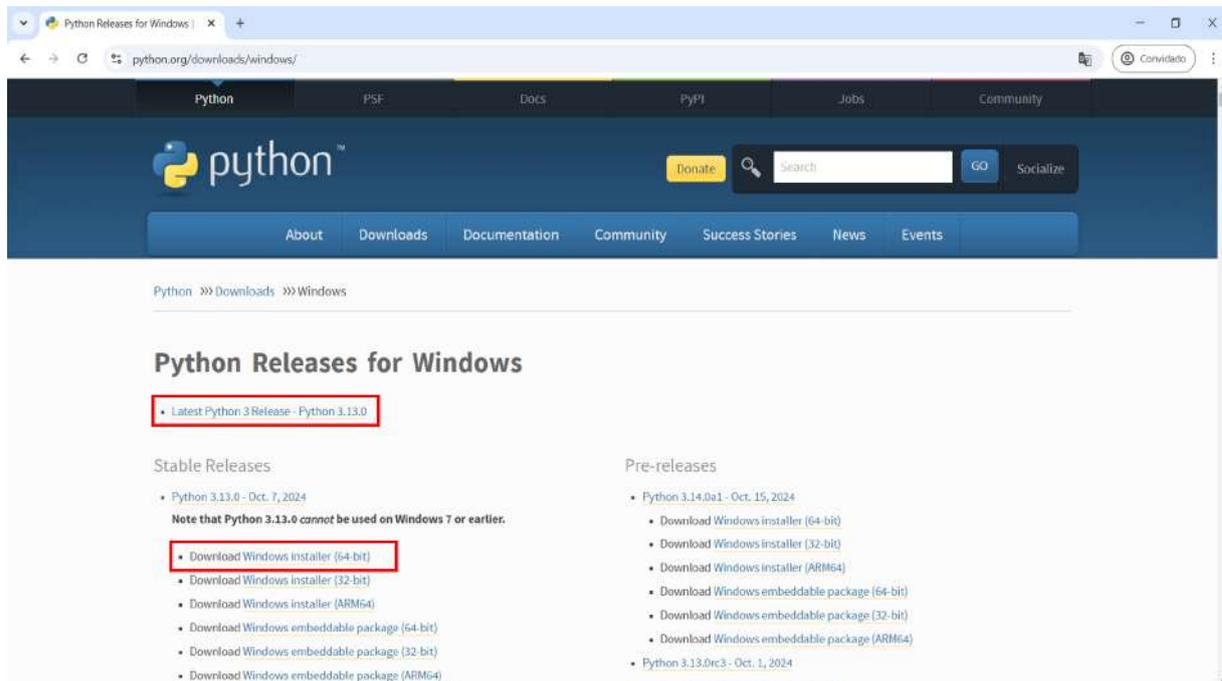


Fonte: Autoria própria

- 3º passo: Escolher a versão que deseja instalar.

Escolhido o sistema operacional, abrirá uma tela com todas as versões do programa disponíveis para download (figura 3.9) . Nessa página, deve-se escolher a versão compatível com a máquina em que se está trabalhando. Aconselha-se utilizar sempre a versão mais recente compatível. Aqui utilizou-se a versão mais recente (3.13.0) para um computador com a versão de 64 bits do Windows.

Figura 3.9 – Versões do Python.



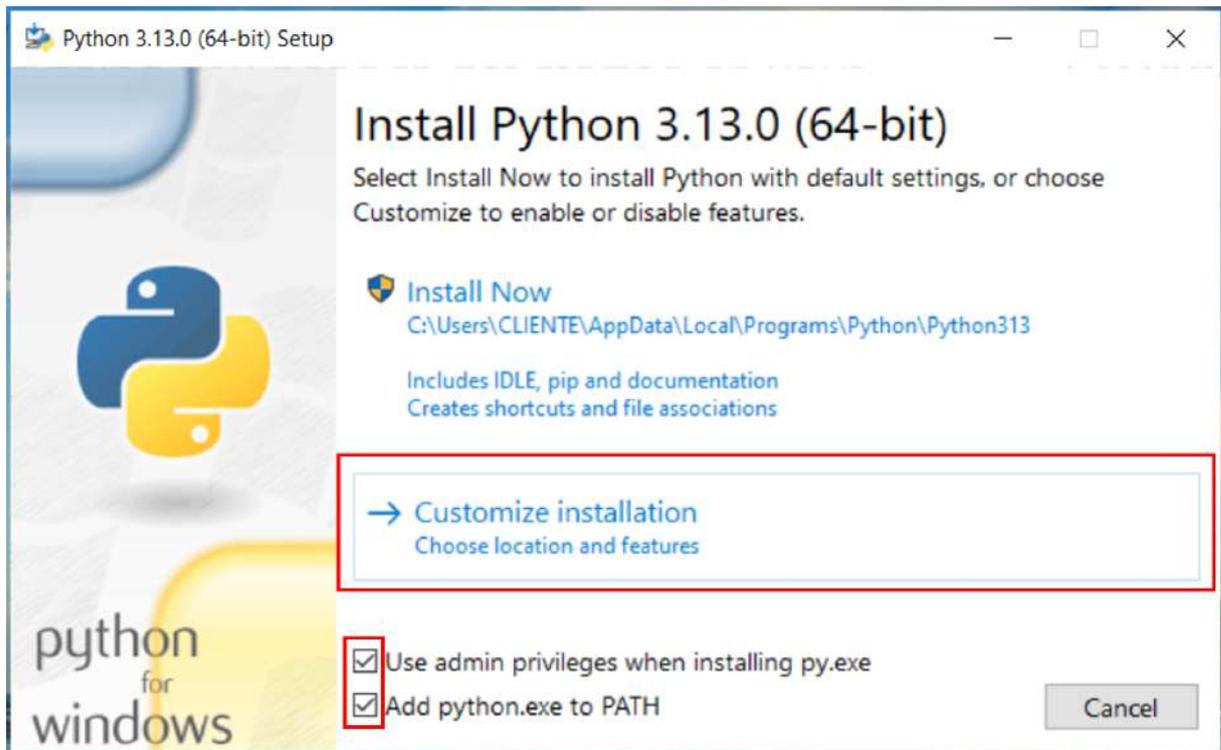
Fonte: Autoria própria

Ao clicar na versão escolhida, o download começará automaticamente. Após a conclusão do download, o arquivo está pronto para ser instalado.

- 4º passo: Instalação.

O passo seguinte é instalar o programa no computador. Para isso, é necessário localizar o arquivo na pasta de downloads e clicar duas vezes com o botão esquerdo do mouse. Ao fazer isso, surgirá uma tela com duas possibilidades de instalação (figura 3.10). É importante certificar-se de que as caixas de seleção na parte inferior da tela estão marcadas. A primeira opção inicia a instalação imediatamente e a segunda permite customizar a instalação. Sugere-se optar pela segunda opção.

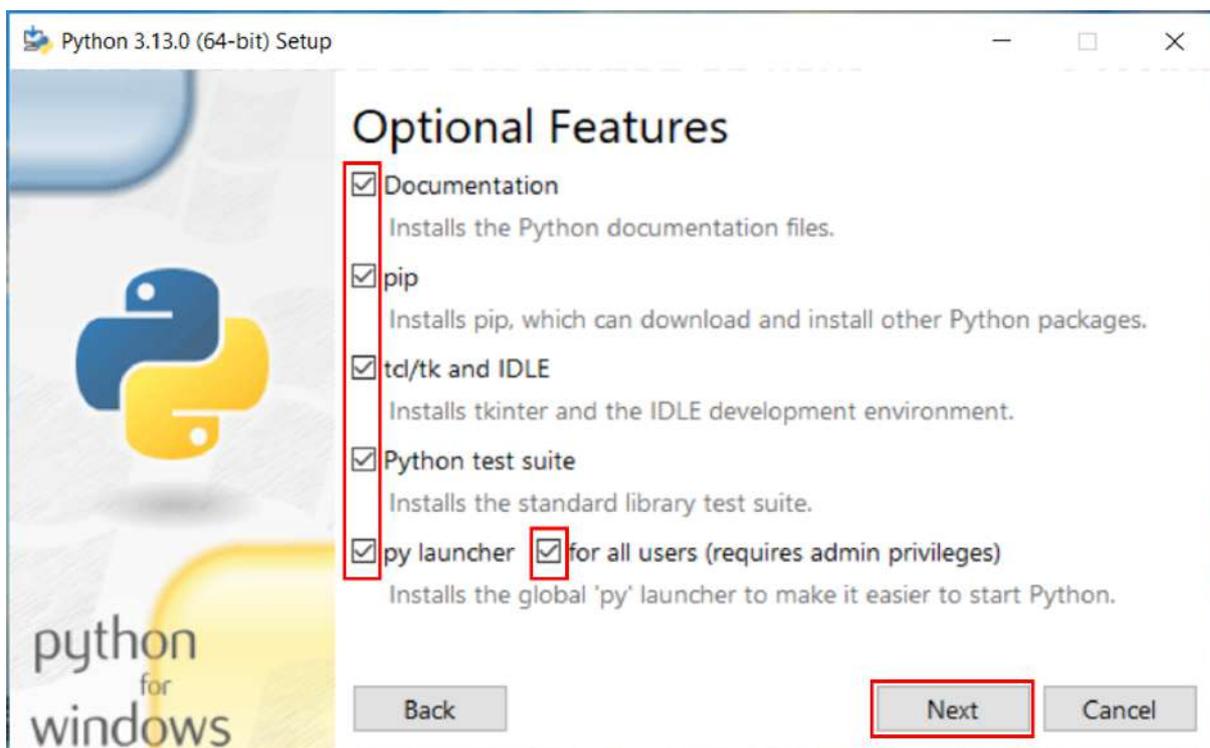
Figura 3.10 – Opções de instalação.



Fonte: Autoria própria

Feita a escolha de customizar a instalação, surgirá mais uma tela (figura 3.11). Nessa tela, deve-se conferir se todas as caixas de seleção estão marcadas. Feito isso, clica-se em “next” para dar prosseguimento à instalação.

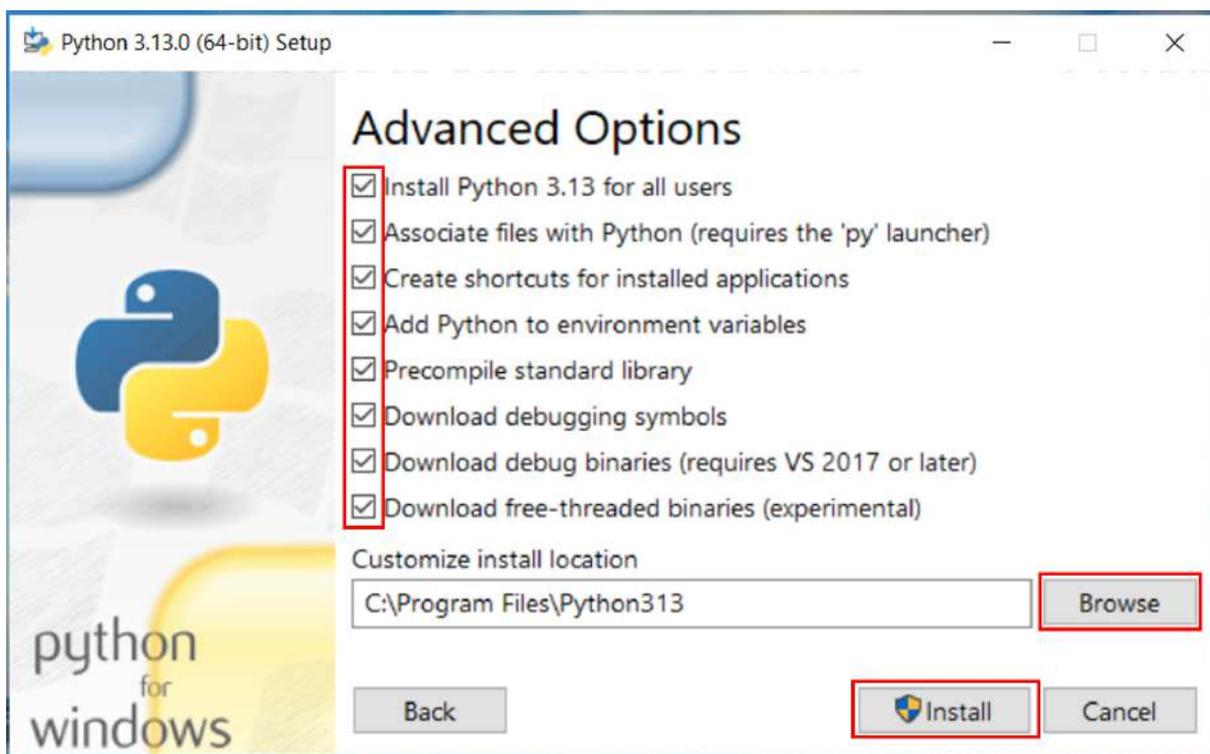
Figura 3.11 – Recursos opcionais.



Fonte: Autoria própria

A última tela conclui o processo de instalação. Mais uma vez, é necessário selecionar todas as caixas, como mostrado na imagem abaixo (figura 3.12). Nessa tela, ainda é possível escolher onde o programa será instalado clicando em “browse”. Ao clicar em “Install” dá-se por finalizada a instalação do Python.

Figura 3.12 – Opções avançadas.



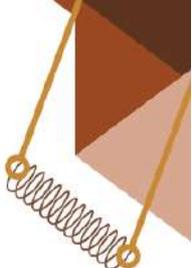
Fonte: Autoria própria

Feito todo esse processo, é necessário aguardar a barra de carregamento finalizar e clicar em “concluir”.

3.1.2.1.2 Simulações

Antecedendo a visualização prática do funcionamento do aparato experimental, foram desenvolvidos quatro códigos em Python para simular diferentes sistemas oscilatórios: **o pêndulo simples, o pêndulo simples amortecido, o pêndulo simples forçado e dois pêndulos simples acoplados por uma mola**, sendo este último um modelo semelhante ao sistema físico desenvolvido. Cada uma dessas simulações computacionais foi projetada para reproduzir o comportamento esperado dos sistemas reais, possibilitando a análise detalhada de suas dinâmicas antes da montagem física. Essa abordagem permitiu uma compreensão prévia das variáveis envolvidas, bem como a identificação de possíveis desafios experimentais, tornando o processo de construção e calibração do aparato mais eficiente.

A importância dessa etapa inicial reside no fato de que a simulação computacional proporciona um ambiente controlado e seguro para a exploração de conceitos fundamentais, como oscilações, amortecimento, ressonância e acoplamento de sistemas. Além disso, a manipulação de parâmetros nos códigos oferece percepções sobre o impacto de fatores como massa, comprimento e coeficientes de amortecimento na resposta dinâmica dos sistemas. Esse processo não apenas fortalece a base teórica dos experimentos, mas também garante uma preparação mais sólida para a aplicação prática, alinhando o desenvolvimento



experimental com objetivos didáticos e de pesquisa.

Nesta subseção, são detalhados os códigos desenvolvidos, com uma descrição de suas funcionalidades e dos objetivos específicos de cada um, destacando suas contribuições para a compreensão e análise dos sistemas oscilatórios simulados.

I - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO PÊNDULO SIMPLES

Introdução

Este documento apresenta o desenvolvimento de um aplicativo em Python para simular numericamente a dinâmica de um pêndulo simples. Utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK-4), o programa permite calcular a evolução temporal do sistema, bem como visualizar graficamente aspectos relevantes, como a trajetória angular, a energia cinética, a energia potencial e o vetor velocidade do bob. Além disso, o aplicativo inclui controles interativos que permitem ajustar parâmetros físicos do sistema em tempo real.

O aplicativo foi concebido como uma ferramenta educativa, oferecendo uma interface gráfica intuitiva que possibilita explorar os efeitos de diferentes condições iniciais e parâmetros físicos. Entre as funcionalidades, destacam-se a animação do movimento do pêndulo, a exibição de gráficos de energia e trajetória, e a manipulação interativa de variáveis como massa e comprimento do fio.

Descrição do Código

O código inicializa com a definição das constantes físicas do sistema, como a aceleração da gravidade $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, e os parâmetros ajustáveis: massa do bob m , comprimento do fio L e deslocamento angular inicial $\theta_0 = 60^\circ$. O intervalo de tempo para a integração numérica é definido como $\Delta t = 0,01 \text{ s}$, garantindo alta precisão na simulação.

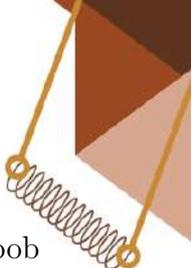
A equação diferencial que descreve o sistema é dada por:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0,$$

e é resolvida numericamente pelo método RK-4. A função `derivs` calcula as derivadas de estado θ e $\dot{\theta}$, enquanto a função `run_simulation` executa a integração numérica para o tempo total definido pelo usuário. Os resultados, θ (deslocamento angular) e $\dot{\theta}$ (velocidade angular), são armazenados para posterior visualização.

Visualização Gráfica e Animação

A interface gráfica é implementada utilizando a biblioteca `matplotlib` e oferece duas áreas principais:

- 
- **Animação do Pêndulo:** Mostra a evolução do movimento em tempo real. O bob (massa pendular) é representado por um círculo vermelho, conectado por uma haste ao ponto de suspensão. Um vetor azul indica a velocidade tangencial do bob.
 - **Gráfico da Posição Angular:** Apresenta a evolução da posição angular do bob em função do tempo, permitindo analisar o comportamento oscilatório do sistema.

Além disso, o aplicativo inclui barras verticais que exibem a energia cinética e a energia potencial do sistema, normalizadas em relação à energia total.

Controles Interativos

O aplicativo incorpora funcionalidades interativas para personalização da simulação:

- **Sliders:** Permitem ajustar os valores de massa m e comprimento do fio L durante a execução, alterando dinamicamente a simulação.
- **Botões:** Controles para parar (`stop_animation`) e reiniciar (`restart_animation`) a animação.

A função `update` é acionada ao modificar os sliders, recalculando as trajetórias com os novos valores e atualizando as visualizações em tempo real.

Conclusão

Este aplicativo é uma ferramenta robusta para o ensino de física clássica, especialmente no estudo do movimento oscilatório. Ele combina a precisão de métodos numéricos com uma interface interativa, proporcionando uma experiência de aprendizado visual e prática. O código pode ser expandido para incluir outros fenômenos, como amortecimento ou forças externas, ampliando seu potencial educacional e de pesquisa.

As figuras apresentadas a seguir ilustram o código desenvolvido.

Figura 3.13 – Código da simulação de um pêndulo simples - página 1 de 4

```
*um-pendulo-whole.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\SINGLE\um-pendulo-whole.py (3.11.4)*
File Edit Format Run Options Window Help
# APLICATIVO PARA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA DINÂMICA DE UM PÊNDULO SIMPLES
# CODIGO COMPLETO
# MÉTODO RK-4
# GRÁFICO DA TRAJETÓRIA EM FUNÇÃO DO TEMPO
# AJUSTE INTERATIVO DOS PARÂMETROS DE SIMULAÇÃO
# ANIMAÇÃO DA EVOLUÇÃO TEMPORAL DO PÊNDULO
# VISUALIZAÇÃO DO VETOR VELOCIDADE
# GRÁFICO DA EVOLUÇÃO DAS ENERGIAS POTENCIAL E CINÉTICA
# N. M. SOTOMAYOR; RAFAEL MEDEIROS DE FREITAS; L. Y. A. DAVILA V. MAIO 2024.
# EQUAÇÃO DO PÊNDULO
#\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.widgets import Slider, Button
import matplotlib.animation as animation

# Constantes iniciais
initial_m = 1
initial_L = 1
g = 9.81 # aceleração devido à gravidade (m/s^2)

# Deslocamento angular inicial (rad) e velocidade tangencial (m/s)
theta0, v0 = np.radians(60), 0

# Tempo de passo para integração numérica da equação de movimento (s).
dt = 0.01

# Inicializa as posições angulares e as velocidades tangenciais.
theta, v = [theta0], [v0]

# Número de períodos desejados
num_periods = 16 # Ajuste conforme necessário

# Tempo total de simulação
total_simulation_time = num_periods * (2 * np.pi * np.sqrt(initial_L / g))

def derivs(state, m, L):
    theta, omega = state
    dtheta_dt = omega
    domega_dt = -(g / L) * np.sin(theta)
    return np.array([dtheta_dt, domega_dt])

def run_simulation(m, L):
    theta, v = [theta0], [v0]
    state = np.array([theta0, v0])

    t = 0
    while t < total_simulation_time:
        k1 = derivs(state, m, L)
        k2 = derivs(state + 0.5 * dt * k1, m, L)
        k3 = derivs(state + 0.5 * dt * k2, m, L)
        k4 = derivs(state + dt * k3, m, L)
        state += dt / 6.0 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
        theta.append(state[0])
        v.append(state[1])
        t += dt
    return theta, v

theta, v = run_simulation(initial_m, initial_L) #PAGINA 1
```

Fonte: Autoria própria

Figura 3.14 – Código da simulação de um pêndulo simples - página 2 de 4

```
*um-pendulo-whole.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\SINGLE\um-pendulo-whole.py (3.11.4)*
File Edit Format Run Options Window Help

theta, v = run_simulation(initial_m, initial_L)    #PAGINA 1

def get_coords(th, L):
    return L * np.sin(th), -L * np.cos(th)

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(12, 5))

# Ajustar a posição dos eixos da animação e do gráfico
ax1.set_position([0.27, 0.33, 0.6, 0.65])
ax2.set_position([0.27, 0.05, 0.6, 0.2])

x0, y0 = get_coords(theta0, initial_L)
linel, = ax1.plot([0, x0], [0, y0], lw=3, c='k')
bob_radius = 0.12
circle1 = ax1.add_patch(plt.Circle(get_coords(theta0, initial_L), bob_radius, fc='r', zorder=4))

# Adicionando as linhas dos eixos x = 0 e y = 0
ax1.axhline(0, color='green')
ax1.axvline(0, color='green')

# Adicionando as barras verticais
ax_potential_energy = plt.axes([0.82, 0.65, 0.05, 0.2], facecolor='lightgoldenrodyellow')
ax_kinetic_energy = plt.axes([0.9, 0.65, 0.05, 0.2], facecolor='lightgoldenrodyellow')
potential_bar = ax_potential_energy.bar(0, 0, width=1, color='blue')
kinetic_bar = ax_kinetic_energy.bar(0, 0, width=1, color='red')

ax_potential_energy.set_xlim(-0.5, 0.5)
ax_kinetic_energy.set_xlim(-0.5, 0.5)

ax_potential_energy.set_ylim(0, 0.5)
ax_kinetic_energy.set_ylim(0, 0.5)

ax_potential_energy.set_xticks([])
ax_kinetic_energy.set_xticks([])

ax_potential_energy.set_yticks([])
ax_kinetic_energy.set_yticks([])

ax_potential_energy.set_title('Energia Potencial')
ax_kinetic_energy.set_title('Energia Cinética')

# Configurar a razão de aspecto para ser igual
ax1.set_aspect('equal')

ax1.set_xlim(-initial_L * 1.2, initial_L * 1.2)
ax1.set_ylim(-initial_L * 1.5, initial_L * 0.5)

# Inicializando o vetor velocidade
quiver = ax1.quiver(0, 0, 0, 0, angles='xy', scale_units='xy', scale=1, color='blue', zorder=5)

bob_positions = []

# Fator de escala para ajustar o comprimento do vetor de velocidade
scale_factor = 0.2

def animate(i):
    x, y = get_coords(theta[i], initial_L)
    linel.set_data([0, x], [0, y])
    circle1.set_center((x, y))    # PAGINA 2
```

Fonte: Autoria própria

Figura 3.15 – Código da simulação de um pêndulo simples - página 3 de 4

```
um-pendulo-whole.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\SINGLE\um-pendulo-whole.py (3.11.4)
File Edit Format Run Options Window Help
circle1.set_center((x, y)) # PAGINA 2

# Calcular a velocidade do bob
vx = scale_factor * initial_L * v[i] * np.cos(theta[i])
vy = scale_factor * initial_L * v[i] * np.sin(theta[i])

# Atualizar o vetor de velocidade como uma seta na frente do bob
quiver.set_offsets((x, y))
quiver.set_UVC(vx, vy)

bob_positions.append(x)

# Calculando as energias potencial e cinética
kinetic_energy = 0.5 * initial_m * (initial_L * v[i])**2
potential_energy = initial_m * g * (initial_L * (1 - np.cos(theta[i])))

# Normalizando para exibição
max_energy = initial_m * g * initial_L # Energia potencial máxima
normalized_kinetic = kinetic_energy / max_energy
normalized_potential = potential_energy / max_energy

potential_bar[0].set_height(normalized_potential)
kinetic_bar[0].set_height(normalized_kinetic)

plot_position_vs_time(i)

return line1, circle1, potential_bar, kinetic_bar

nframes = len(theta)
interval = dt * 1000
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=nframes, repeat=True, interval=interval)

def plot_position_vs_time(i):
    ax2.clear()
    time_values = np.arange(0, i) * dt
    ax2.plot(time_values, bob_positions[:i], label='Bob')
    ax2.set_xlabel('Tempo (s)')
    ax2.set_ylabel('Posição')
    ax2.set_title('Evolução da Posição do Bob em Função do Tempo')
    ax2.legend()
    ax2.grid(True)

def stop_animation(event):
    ani.event_source.stop()
    plot_position_vs_time(len(theta))

def restart_animation(event):
    ani.event_source.stop()
    ani.frame_seq = ani.new_frame_seq()
    bob_positions.clear()
    ax2.clear()
    ani.event_source.start()

# Criação dos botões interativos
stop_button_ax = plt.axes([0.01, 0.3, 0.2, 0.04])
stop_button = Button(stop_button_ax, 'Parar')
stop_button.on_clicked(stop_animation)

restart_button_ax = plt.axes([0.01, 0.35, 0.2, 0.04])
restart_button = Button(restart_button_ax, 'Reiniciar')
restart_button.on_clicked(restart_animation) # PAGINA 3
```

Fonte: Autoria própria

Figura 3.16 – Código da simulação de um pêndulo simples - página 4 de 4

```
um-pendulo-whole.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\SINGLE\um-pendulo-whole.py (3.11.4)
File Edit Format Run Options Window Help
plot_position_vs_time(i)

    return line1, circle1, potential_bar, kinetic_bar

nframes = len(theta)
interval = dt * 1000
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=nframes, repeat=True, interval=interval)

def plot_position_vs_time(i):
    ax2.clear()
    time_values = np.arange(0, i) * dt
    ax2.plot(time_values, bob_positions[:i], label='Bob')
    ax2.set_xlabel('Tempo (s)')
    ax2.set_ylabel('Posição')
    ax2.set_title('Evolução da Posição do Bob em Função do Tempo')
    ax2.legend()
    ax2.grid(True)

def stop_animation(event):
    ani.event_source.stop()
    plot_position_vs_time(len(theta))

def restart_animation(event):
    ani.event_source.stop()
    ani.frame_seq = ani.new_frame_seq()
    bob_positions.clear()
    ax2.clear()
    ani.event_source.start()

# Criação dos botões interativos
stop_button_ax = plt.axes([0.01, 0.3, 0.2, 0.04])
stop_button = Button(stop_button_ax, 'Parar')
stop_button.on_clicked(stop_animation)

restart_button_ax = plt.axes([0.01, 0.35, 0.2, 0.04])
restart_button = Button(restart_button_ax, 'Reiniciar')
restart_button.on_clicked(restart_animation) # PAGINA 3

# Sliders para ajustar massa e comprimento do pêndulo
ax_mass = plt.axes([0.1, 0.75, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')
ax_length = plt.axes([0.1, 0.7, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')

slider_mass = Slider(ax_mass, 'Massa', 0.1, 5.0, valinit=initial_m)
slider_length = Slider(ax_length, 'Comprimento', 0.5, 5.0, valinit=initial_L)

def update(val):
    global theta, v, initial_m, initial_L
    initial_m = slider_mass.val
    initial_L = slider_length.val
    theta, v = run_simulation(initial_m, initial_L)
    ax1.set_xlim(-initial_L * 1.2, initial_L * 1.2)
    ax1.set_ylim(-initial_L * 1.5, initial_L * 0.5)
    ani.event_source.stop()
    ani.frame_seq = ani.new_frame_seq()
    ani.event_source.start()

slider_mass.on_changed(update)
slider_length.on_changed(update)

plt.show()

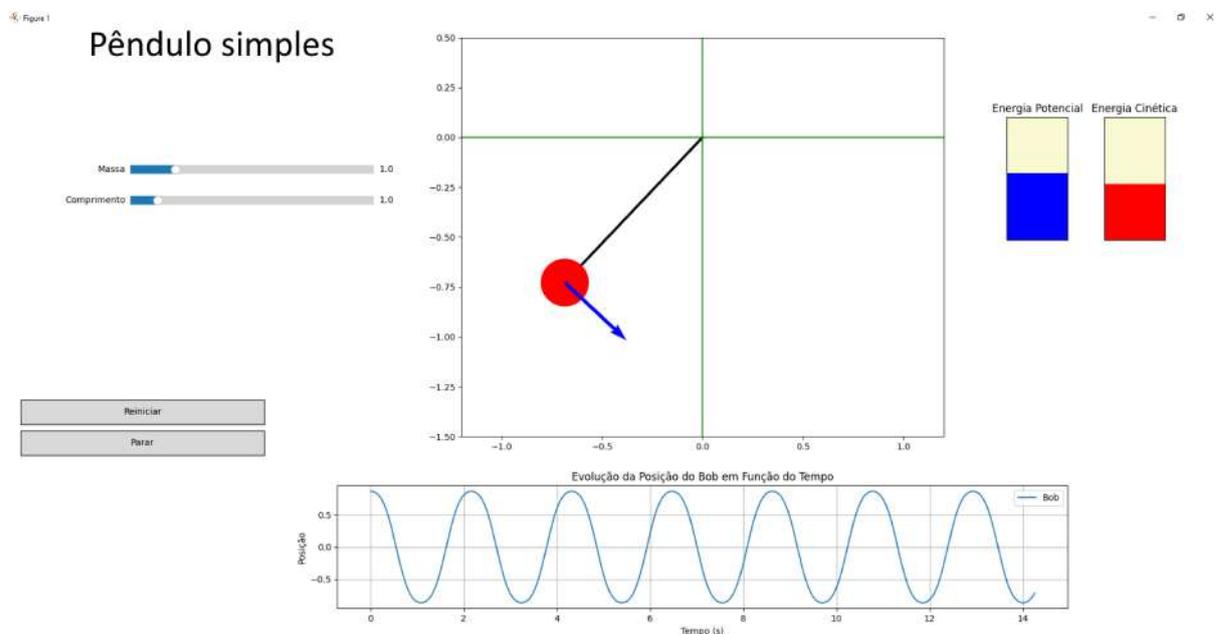
# PAGINA 4
```

Fonte: Autoria própria

A interface do aplicativo é apresentada a seguir: uma janela interativa para

simulação do movimento de um pêndulo simples, com gráficos e controles ajustáveis. Na área superior esquerda, a animação exibe o movimento do pêndulo, com um ponto de massa representado por um círculo vermelho e um vetor azul indicando a velocidade do bob. Próximo à animação, barras verticais ilustram a energia potencial (azul) e cinética (vermelha), variando conforme o movimento. Abaixo, um gráfico de posição versus tempo registra a trajetória do bob ao longo da simulação. No lado esquerdo, controles interativos, como sliders para ajustar a massa e o comprimento do pêndulo, e botões para parar e reiniciar a animação, permitem ao usuário modificar os parâmetros e observar o impacto no sistema em tempo real. A interface oferece uma visualização dinâmica e intuitiva dos conceitos de física envolvidos, com atualizações instantâneas baseadas nas interações do usuário.

Figura 3.17 – Interface da simulação de um pêndulo simples



Fonte: Autoria própria

II - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO PÊNDULO SIMPLES COM AMORTECIMENTO

Introdução

Este documento apresenta a descrição de um programa interativo desenvolvido para simular a dinâmica de um pêndulo simples submetido a forças gravitacionais e de amortecimento proporcional à velocidade angular. A integração numérica das equações de movimento é realizada utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK-4). A aplicação inclui animação da trajetória do pêndulo, gráficos interativos da posição, velocidade e energia, e controle em tempo real dos parâmetros físicos.

Descrição do Código

As constantes iniciais definidas incluem a aceleração da gravidade $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, a massa do pêndulo m , o comprimento do fio L e o coeficiente de amortecimento γ . O deslocamento angular inicial θ_0 é configurado em radianos e a velocidade tangencial inicial v_0 em metros por segundo. O programa considera um intervalo de tempo discreto $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ para a integração.

As equações de movimento, que incluem o efeito do amortecimento, são resolvidas iterativamente pela função `run_simulation`. O método calcula as derivadas do estado atual θ e ω usando a função `derivs`.

Visualização Gráfica

O programa utiliza o `matplotlib` para gerar a animação e os gráficos do sistema. A animação exibe o pêndulo como uma linha conectada a uma massa (bob) representada por um círculo. Gráficos adicionais mostram a evolução da posição, velocidade e energias cinética e potencial ao longo do tempo.

Uma barra de energia na interface ilustra a relação entre energia potencial e cinética, normalizada em relação à energia total. As posições do pêndulo são convertidas em coordenadas cartesianas para visualização.

Interatividade

O programa incorpora elementos interativos que permitem controlar a simulação em tempo real. Os botões permitem pausar ou reiniciar a animação. Sliders ajustam os valores de m , L e γ , com atualizações instantâneas na dinâmica do sistema. A função `update` garante que as alterações nos sliders recalculam as trajetórias e gráficos correspondentes.

Conclusão

Esta aplicação é uma ferramenta educacional que demonstra a interação entre forças gravitacionais e de amortecimento em um sistema físico simples. Sua interface interativa permite explorar os efeitos de diferentes parâmetros em tempo real, tornando o aprendizado de conceitos de física clássica mais dinâmico e acessível. O programa pode ser ampliado para incluir novos efeitos, como forças externas ou não-linearidades adicionais.

As figuras abaixo exibem o código desenvolvido para realizar esta simulação.

Figura 3.18 – Código da simulação de um pêndulo simples amortecido - página 1 de 3

simples-amortecido.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\SIMPLES-AMORTECIDO\simples-amortecido.py (3.11.4)

File Edit Format Run Options Window Help

```
#Este programa implementa uma simulação interativa da dinâmica de um pêndulo simples,
#utilizando o Método Runge-Kutta de 4ª ordem (RK-4) para integração numérica das equações
#de movimento. A força de amortecimento considerada é proporcional à velocidade angular
#do pêndulo, com o coeficiente de amortecimento representado por gamma. A aplicação
#inclui visualização gráfica, ajuste de parâmetros em tempo real e animação da trajetória
#do pêndulo, além de gráficos que mostram a evolução da posição, velocidade e energia
#durante a simulação.
#versão dezembro 2024. N. M. SOTOMAYOR; RAFAEL MEDEIROS DE FREITAS; L. Y. A. DAVILA
#$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) - \gamma \frac{d\theta}{dt}$

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.widgets import Slider, Button
import matplotlib.animation as animation

# Constantes iniciais
initial_m = 1
initial_L = 1
g = 9.81 # aceleração devido à gravidade (m/s^2)
initial_damping = 0.1 # Força de amortecimento inicial

# Deslocamento angular inicial (rad) e velocidade tangencial (m/s)
theta0, v0 = np.radians(60), 0

dt = 0.01

theta, v = [theta0], [v0]
num_periods = 16
total_simulation_time = num_periods * (2 * np.pi * np.sqrt(initial_L / g))

def derivs(state, m, L, damping):
    theta, omega = state
    dtheta_dt = omega
    domega_dt = -(g / L) * np.sin(theta) - damping * omega
    return np.array([dtheta_dt, domega_dt])

def run_simulation(m, L, damping):
    theta, v = [theta0], [v0]
    state = np.array([theta0, v0])
    t = 0
    while t < total_simulation_time:
        k1 = derivs(state, m, L, damping)
        k2 = derivs(state + 0.5 * dt * k1, m, L, damping)
        k3 = derivs(state + 0.5 * dt * k2, m, L, damping)
        k4 = derivs(state + dt * k3, m, L, damping)
        state += dt / 6.0 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
        theta.append(state[0])
        v.append(state[1])
        t += dt
    return theta, v

theta, v = run_simulation(initial_m, initial_L, initial_damping)

def get_coords(th, L):
    return L * np.sin(th), -L * np.cos(th)

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(12, 5))
ax1.set_position([0.27, 0.33, 0.6, 0.65])
ax2.set_position([0.27, 0.05, 0.6, 0.2]) # PAGINA 1
```

Fonte: Autoria própria

Figura 3.19 – Código da simulação de um pêndulo simples amortecido - página 2 de 3

```

*simples-amortecido.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\SIMPLES-AMORTECIDO\simples-amortecido.py (3.11.4)*
File Edit Format Run Options Window Help
ax2.set_position([0.27, 0.05, 0.6, 0.2]) # PAGINA 1

x0, y0 = get_coords(theta0, initial_L)
line1, = ax1.plot([0, x0], [0, y0], lw=3, c='k')
bob_radius = 0.12
circle1 = ax1.add_patch(plt.Circle(get_coords(theta0, initial_L), bob_radius, fc='r', zorder=4))
ax1.axhline(0, color='green')
ax1.axvline(0, color='green')

ax_potential_energy = plt.axes([0.82, 0.65, 0.05, 0.2], facecolor='lightgoldenrodyellow')
ax_kinetic_energy = plt.axes([0.9, 0.65, 0.05, 0.2], facecolor='lightgoldenrodyellow')
potential_bar = ax_potential_energy.bar(0, 0, width=1, color='blue')
kinetic_bar = ax_kinetic_energy.bar(0, 0, width=1, color='red')

ax_potential_energy.set_xlim(-0.5, 0.5)
ax_kinetic_energy.set_xlim(-0.5, 0.5)

ax_potential_energy.set_ylim(0, 0.5)
ax_kinetic_energy.set_ylim(0, 0.5)
ax_potential_energy.set_xticks([])
ax_kinetic_energy.set_xticks([])
ax_potential_energy.set_yticks([])
ax_kinetic_energy.set_yticks([])
ax_potential_energy.set_title('Energia Potencial')
ax_kinetic_energy.set_title('Energia Cinética')

ax1.set_aspect('equal')
ax1.set_xlim(-initial_L * 1.2, initial_L * 1.2)
ax1.set_ylim(-initial_L * 1.5, initial_L * 0.5)
quiver = ax1.quiver(0, 0, 0, 0, angles='xy', scale_units='xy', scale=1, color='blue', zorder=5)
bob_positions = []
scale_factor = 0.2

def animate(i):
    x, y = get_coords(theta[i], initial_L)
    line1.set_data([0, x], [0, y])
    circle1.set_center((x, y))
    vx = scale_factor * initial_L * v[i] * np.cos(theta[i])
    vy = scale_factor * initial_L * v[i] * np.sin(theta[i])
    quiver.set_offsets((x, y))
    quiver.set_UVC(vx, vy)
    bob_positions.append(x)
    kinetic_energy = 0.5 * initial_m * (initial_L * v[i])**2
    potential_energy = initial_m * g * (initial_L * (1 - np.cos(theta[i])))
    max_energy = initial_m * g * initial_L
    normalized_kinetic = kinetic_energy / max_energy
    normalized_potential = potential_energy / max_energy
    potential_bar[0].set_height(normalized_potential)
    kinetic_bar[0].set_height(normalized_kinetic)
    plot_position_vs_time(i)
    return line1, circle1, potential_bar, kinetic_bar

nframes = len(theta)
interval = dt * 1000
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=nframes, repeat=True, interval=interval)

def plot_position_vs_time(i):
    ax2.clear()
    time_values = np.arange(0, i) * dt
    ax2.plot(time_values, bob_positions[:i], label='Bob')
    ax2.set_xlabel('Tempo (s)') # PAGINA 2

```

Fonte: Autoria própria

Figura 3.20 – Código da simulação de um pêndulo simples amortecido - página 3 de 3

```
*simples-amortecido.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\SIMPLES-AMORTECIDO\simples-amortecido.py (3.11.4)*
File Edit Format Run Options Window Help
    return line1, circle1, potential_bar, kinetic_bar

nframes = len(theta)
interval = dt * 1000
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=nframes, repeat=True, interval=interval)

def plot_position_vs_time(i):
    ax2.clear()
    time_values = np.arange(0, i) * dt
    ax2.plot(time_values, bob_positions[:i], label='Bob')
    ax2.set_xlabel('Tempo (s)')
    ax2.set_ylabel('Posição')
    ax2.set_title('Evolução da Posição do Bob em Função do Tempo')
    ax2.legend()
    ax2.grid(True)

def stop_animation(event):
    ani.event_source.stop()
    plot_position_vs_time(len(theta))

def restart_animation(event):
    ani.event_source.stop()
    ani.frame_seq = ani.new_frame_seq()
    bob_positions.clear()
    ax2.clear()
    ani.event_source.start()

stop_button_ax = plt.axes([0.01, 0.3, 0.2, 0.04])
stop_button = Button(stop_button_ax, 'Parar')
stop_button.on_clicked(stop_animation)

restart_button_ax = plt.axes([0.01, 0.35, 0.2, 0.04])
restart_button = Button(restart_button_ax, 'Reiniciar')
restart_button.on_clicked(restart_animation)

ax_mass = plt.axes([0.1, 0.75, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')
ax_length = plt.axes([0.1, 0.7, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')
ax_damping = plt.axes([0.1, 0.65, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')

slider_mass = Slider(ax_mass, 'Massa', 0.1, 5.0, valinit=initial_m)
slider_length = Slider(ax_length, 'Comprimento', 0.5, 5.0, valinit=initial_L)
slider_damping = Slider(ax_damping, 'Amortecimento', 0.0, 1.0, valinit=initial_damping)

def update(val):
    global theta, v, initial_m, initial_L, initial_damping
    initial_m = slider_mass.val
    initial_L = slider_length.val
    initial_damping = slider_damping.val
    theta, v = run_simulation(initial_m, initial_L, initial_damping)
    ax1.set_xlim(-initial_L * 1.2, initial_L * 1.2)
    ax1.set_ylim(-initial_L * 1.5, initial_L * 0.5)
    ani.event_source.stop()
    ani.frame_seq = ani.new_frame_seq()
    ani.event_source.start()

slider_mass.on_changed(update)
slider_length.on_changed(update)
slider_damping.on_changed(update)

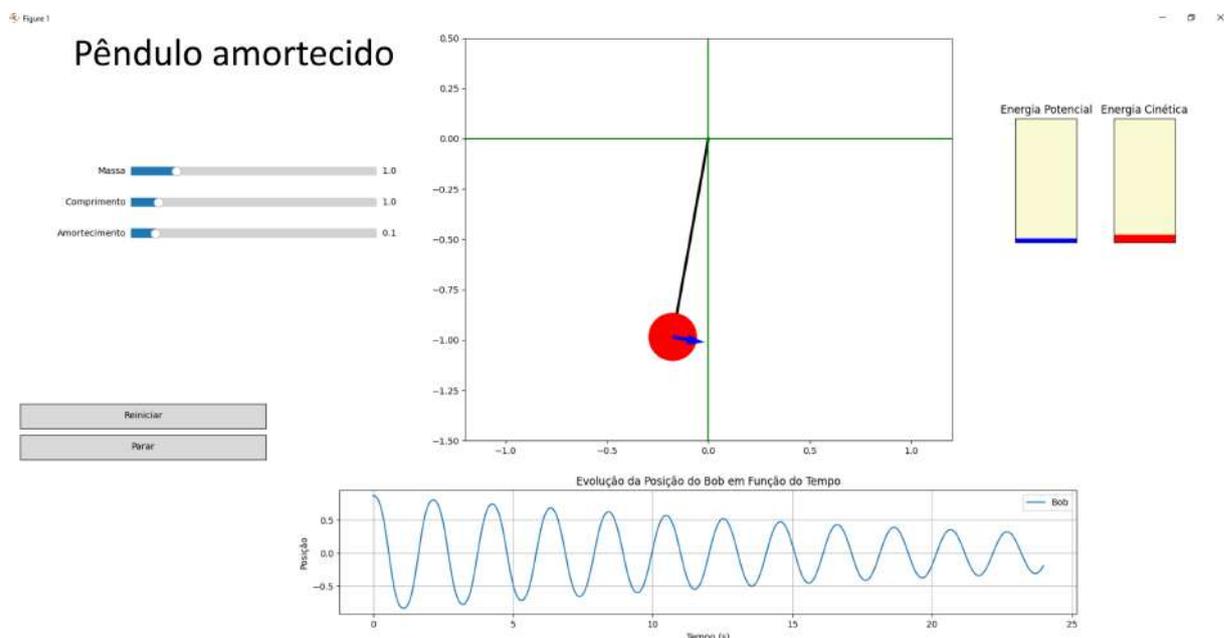
plt.show()
# PAGINA 3
```

Fonte: Autoria própria

A interface do programa (figura 3.21) apresenta uma simulação interativa da

dinâmica de um pêndulo simples amortecido, com visualização gráfica e animações. Na parte superior, a animação mostra o pêndulo em movimento, com uma linha preta representando o fio e um círculo vermelho representando o ponto de massa (bob), que oscila de acordo com os parâmetros definidos. À direita da animação, há barras gráficas que ilustram a evolução da energia potencial (barra azul) e da energia cinética (barra vermelha), com alturas variando conforme o movimento do pêndulo. À esquerda, controles deslizantes (sliders) permitem ao usuário ajustar a massa do pêndulo, o comprimento do fio e o coeficiente de amortecimento, com as alterações sendo refletidas em tempo real na simulação. Abaixo da animação, um gráfico exibe a evolução da posição do pêndulo ao longo do tempo. Há também botões para parar e reiniciar a animação, proporcionando uma interação dinâmica e flexível com o sistema. A interface oferece uma forma intuitiva de explorar a física do movimento oscilatório e observar os efeitos das variáveis no comportamento do pêndulo.

Figura 3.21 – Interface da simulação de um pêndulo simples amortecido

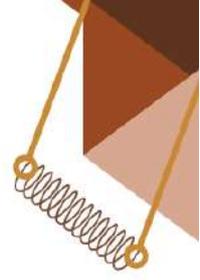


Fonte: Autoria própria

III - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO PÊNDULO SIMPLES FORÇADO

Introdução

Este documento descreve a implementação de um código desenvolvido para simular a dinâmica de um pêndulo simples submetido a uma força periódica externa. A simulação considera fatores como gravidade, amortecimento e movimento angular. O programa utiliza métodos de integração numérica e visualizações interativas para explorar a dinâmica do sistema.



Equação do Movimento

A equação diferencial que governa o pêndulo forçado é dada por:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \sin \theta = F_0 \cos(\omega t),$$

onde γ é o coeficiente de amortecimento, g é a aceleração gravitacional, L é o comprimento do pêndulo, F_0 é a amplitude da força externa, e ω é a frequência angular da força.

Descrição do Código

O programa define inicialmente as constantes físicas do sistema, como:

- Massa m ,
- Comprimento do pêndulo L ,
- Aceleração gravitacional $g = 9,81 \text{ m/s}^2$,
- Amplitude da força externa F_0 ,
- Frequência angular da força ω ,
- Coeficiente de amortecimento γ ,
- Deslocamento angular inicial θ_0 (em radianos),
- Velocidade inicial v_0 (em m/s).

O intervalo de tempo $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ é usado para a integração numérica da equação de movimento utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

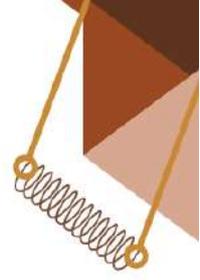
Visualização Gráfica

A visualização é realizada com o `matplotlib`, dividida em duas partes principais:

- **Animação do pêndulo:** Mostra o movimento do pêndulo em tempo real. O pêndulo é representado por uma linha conectada a um círculo, com vetores indicando a velocidade.
- **Gráfico de posição:** Exibe a evolução da posição do pêndulo ao longo do tempo.

As barras de energia mostram as energias potencial, cinética e total, normalizadas pela energia máxima.





Interatividade

O programa inclui controles interativos:

- **Botões:** Permitem parar (`stop_animation`) ou reiniciar (`restart_animation`) a animação.
- **Sliders:** Ajustam parâmetros como massa m , comprimento L , amplitude F_0 , frequência ω e amortecimento γ . As alterações atualizam a dinâmica em tempo real.

Conclusão

Este programa fornece uma ferramenta educativa para explorar a dinâmica de um pêndulo forçado. A combinação de simulação numérica e visualização gráfica interativa oferece uma experiência envolvente, permitindo aos usuários ajustar parâmetros e observar os efeitos em tempo real. O código pode ser expandido para incluir efeitos dissipativos complexos ou configurações adicionais.

Nas figuras abaixo, é apresentado o código desenvolvido para a simulação.



Figura 3.22 – Código da simulação de um pêndulo simples forçado - página 1 de 4

```
*single-forcado.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\SINGLE-FORCADO\single-forcado.py (3.11.4)*
File Edit Format Run Options Window Help
# Este código, Versão Dezembro 2024, realiza a simulação numérica de um pêndulo simples forçado,
# considerando uma força periódica de excitação e outros fatores como gravidade, amortecimento e
# movimento angular. A implementação utiliza métodos de integração numérica e visualizações
# interativas para explorar a dinâmica do pêndulo.
# N. M. SOTOMAYOR; RAFAEL MEDEIROS DE FREITAS; L. Y. A. DAVILA
# EQUAÇÃO DO PÊNDULO:
# 
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \sin\theta = \frac{F_0}{mL} \cos(\omega_f t)$$

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.widgets import Slider, Button
import matplotlib.animation as animation

# Constantes iniciais
initial_m = 1
initial_L = 1
g = 9.81 # aceleração devido à gravidade (m/s^2)

# Parâmetros da força periódica
F0 = 0.8 # Amplitude da força
omega_f = 3.3 # Frequência da força externa
gamma = 0.0 # Coeficiente de amortecimento (opcional)

# Deslocamento angular inicial (rad) e velocidade tangencial (m/s)
theta0, v0 = np.radians(60), 0

# Tempo de passo para integração numérica da equação de movimento (s).
dt = 0.01

# Número de períodos desejados
num_periods = 16 # Ajuste conforme necessário

# Tempo total de simulação
total_simulation_time = num_periods * (2 * np.pi / omega_f)

def derivs(state, t, m, L, F0, omega_f, gamma):
    theta, omega = state

    # Equação diferencial para pêndulo forçado
    # Inclui termos de:
    # 1. Gravidade (restituição)
    # 2. Amortecimento
    # 3. Força periódica externa
    dtheta_dt = omega
    domega_dt = -(g / L) * np.sin(theta) - gamma * omega + (F0 / (m * L)) * np.sin(omega_f * t)

    return np.array([dtheta_dt, domega_dt])

def run_simulation(m, L, F0, omega_f, gamma):
    theta, v = [theta0], [v0]
    state = np.array([theta0, v0])

    t = 0
    time_values = [t]

    while t < total_simulation_time:
        k1 = derivs(state, t, m, L, F0, omega_f, gamma)
        k2 = derivs(state + 0.5 * dt * k1, t + 0.5 * dt, m, L, F0, omega_f, gamma)
        k3 = derivs(state + 0.5 * dt * k2, t + 0.5 * dt, m, L, F0, omega_f, gamma)
        k4 = derivs(state + dt * k3, t + dt, m, L, F0, omega_f, gamma)

# PAGINA 01
```

Fonte: Autoria própria

Figura 3.23 – Código da simulação de um pêndulo simples forçado - página 2 de 4

```
*single-forcado.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\SINGLE-FORCADO\single-forcado.py (3.11.4)*
File Edit Format Run Options Window Help # PAGINA 01

    state += dt / 6.0 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
    theta.append(state[0])
    v.append(state[1])

    t += dt
    time_values.append(t)

    return theta, v, time_values

theta, v, time_values = run_simulation(initial_m, initial_L, F0, omega_f, gamma)

def get_coords(th, L):
    return L * np.sin(th), -L * np.cos(th)

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(15, 8))

# Posicionamento dos eixos
ax1.set_position([0.27, 0.33, 0.6, 0.65])
ax2.set_position([0.27, 0.05, 0.6, 0.2])

x0, y0 = get_coords(theta0, initial_L)
line1, = ax1.plot([0, x0], [0, y0], lw=3, c='k')
bob_radius = 0.12
circle1 = ax1.add_patch(plt.Circle(get_coords(theta0, initial_L), bob_radius, fc='r', zorder=4))

# Eixos e barras de energia
ax1.axhline(0, color='green')
ax1.axvline(0, color='green')

# Modificação: Barras de energia mais largas
ax_potential_energy = plt.axes([0.85, 0.65, 0.05, 0.2], facecolor='lightgoldenrodyellow')
ax_kinetic_energy = plt.axes([0.93, 0.65, 0.05, 0.2], facecolor='lightgoldenrodyellow')
ax_total_energy = plt.axes([0.78, 0.65, 0.05, 0.2], facecolor='lightgoldenrodyellow')

potential_bar = ax_potential_energy.bar(0, 0, width=1, color='blue')
kinetic_bar = ax_kinetic_energy.bar(0, 0, width=1, color='red')
total_bar = ax_total_energy.bar(0, 0, width=1, color='green')

# Configurações das barras de energia
for ax_energy in [ax_potential_energy, ax_kinetic_energy, ax_total_energy]:
    ax_energy.set_xlim(-0.5, 0.5)
    ax_energy.set_ylim(0, 2) # Aumentado para mostrar mais energia
    ax_energy.set_xticks([])
    ax_energy.set_yticks([])

ax_potential_energy.set_title('Energia Potencial')
ax_kinetic_energy.set_title('Energia Cinética')
ax_total_energy.set_title('Energia Total')

# Configurações do eixo
ax1.set_aspect('equal')
ax1.set_xlim(-initial_L * 1.2, initial_L * 1.2)
ax1.set_ylim(-initial_L * 1.5, initial_L * 0.5)

# Vetor velocidade
quiver = ax1.quiver(0, 0, 0, 0, angles='xy', scale_units='xy', scale=1, color='blue', zorder=5)

bob_positions = []
scale_factor = 0.2

# PAGINA 02
```

Fonte: Autoria própria

Figura 3.24 – Código da simulação de um pêndulo simples forçado - página 3 de 4

```
*single-forcado.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\SINGLE-FORCADO\single-forcado.py (3.11.4)*
File Edit Format Run Options Window Help # PAGINA 02

def animate(i):
    x, y = get_coords(theta[i], initial_L)
    line1.set_data([0, x], [0, y])
    circle1.set_center((x, y))

    # Vetor velocidade
    vx = scale_factor * initial_L * v[i] * np.cos(theta[i])
    vy = scale_factor * initial_L * v[i] * np.sin(theta[i])
    quiver.set_offsets((x, y))
    quiver.set_UVC(vx, vy)

    bob_positions.append(x)

    # Energias
    kinetic_energy = 0.5 * initial_m * (initial_L * v[i])**2
    potential_energy = initial_m * g * (initial_L * (1 - np.cos(theta[i])))
    total_energy = kinetic_energy + potential_energy

    max_energy = initial_m * g * initial_L
    normalized_kinetic = kinetic_energy / max_energy
    normalized_potential = potential_energy / max_energy
    normalized_total = total_energy / max_energy

    potential_bar[0].set_height(normalized_potential)
    kinetic_bar[0].set_height(normalized_kinetic)
    total_bar[0].set_height(normalized_total)

    plot_position_vs_time(i)

    return line1, circle1, potential_bar, kinetic_bar, total_bar

nframes = len(theta)
interval = dt * 1000
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=nframes, repeat=True, interval=interval)

def plot_position_vs_time(i):
    ax2.clear()
    ax2.plot(time_values[:i], bob_positions[:i], label='Bob')
    ax2.set_xlabel('Tempo (s)')
    ax2.set_ylabel('Posição')
    ax2.set_title('Evolução da Posição do Bob')
    ax2.legend()
    ax2.grid(True)

def stop_animation(event):
    ani.event_source.stop()
    plot_position_vs_time(len(theta))

def restart_animation(event):
    ani.event_source.stop()
    ani.frame_seq = ani.new_frame_seq()
    bob_positions.clear()
    ax2.clear()
    ani.event_source.start()

stop_button_ax = plt.axes([0.01, 0.3, 0.2, 0.04])
stop_button = Button(stop_button_ax, 'Parar')
stop_button.on_clicked(stop_animation)

restart_button_ax = plt.axes([0.01, 0.35, 0.2, 0.04]) # PAGINA 03
```

Fonte: Autoria própria

Figura 3.25 – Código da simulação de um pêndulo simples forçado - página 4 de 4

```
*single-forcado.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\SINGLE-FORCADO\single-forcado.py (3.11.4)*
File Edit Format Run Options Window Help
ax2.legend()
ax2.grid(True)

def stop_animation(event):
    ani.event_source.stop()
    plot_position_vs_time(len(theta))

def restart_animation(event):
    ani.event_source.stop()
    ani.frame_seq = ani.new_frame_seq()
    bob_positions.clear()
    ax2.clear()
    ani.event_source.start()

stop_button_ax = plt.axes([0.01, 0.3, 0.2, 0.04])
stop_button = Button(stop_button_ax, 'Parar')
stop_button.on_clicked(stop_animation)

restart_button_ax = plt.axes([0.01, 0.35, 0.2, 0.04]) # PAGINA 03
restart_button = Button(restart_button_ax, 'Reiniciar')
restart_button.on_clicked(restart_animation)

# Sliders para parâmetros
ax_mass = plt.axes([0.1, 0.85, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')
ax_length = plt.axes([0.1, 0.8, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')
ax_force_amp = plt.axes([0.1, 0.75, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')
ax_force_freq = plt.axes([0.1, 0.7, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')
ax_damping = plt.axes([0.1, 0.65, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')

slider_mass = Slider(ax_mass, 'Massa', 0.1, 5.0, valinit=initial_m)
slider_length = Slider(ax_length, 'Comprimento', 0.5, 5.0, valinit=initial_L)
slider_force_amp = Slider(ax_force_amp, 'Amplitude Força', 0, 2.0, valinit=F0)
slider_force_freq = Slider(ax_force_freq, 'Frequência Força', 0.1, 5.0, valinit=omega_f)
slider_damping = Slider(ax_damping, 'Amortecimento', 0, 2.0, valinit=gamma)

def update(val):
    global theta, v, time_values, initial_m, initial_L, F0, omega_f, gamma

    initial_m = slider_mass.val
    initial_L = slider_length.val
    F0 = slider_force_amp.val
    omega_f = slider_force_freq.val
    gamma = slider_damping.val

    theta, v, time_values = run_simulation(initial_m, initial_L, F0, omega_f, gamma)

    ax1.set_xlim(-initial_L * 1.2, initial_L * 1.2)
    ax1.set_ylim(-initial_L * 1.5, initial_L * 0.5)

    ani.event_source.stop()
    ani.frame_seq = ani.new_frame_seq()
    ani.event_source.start()

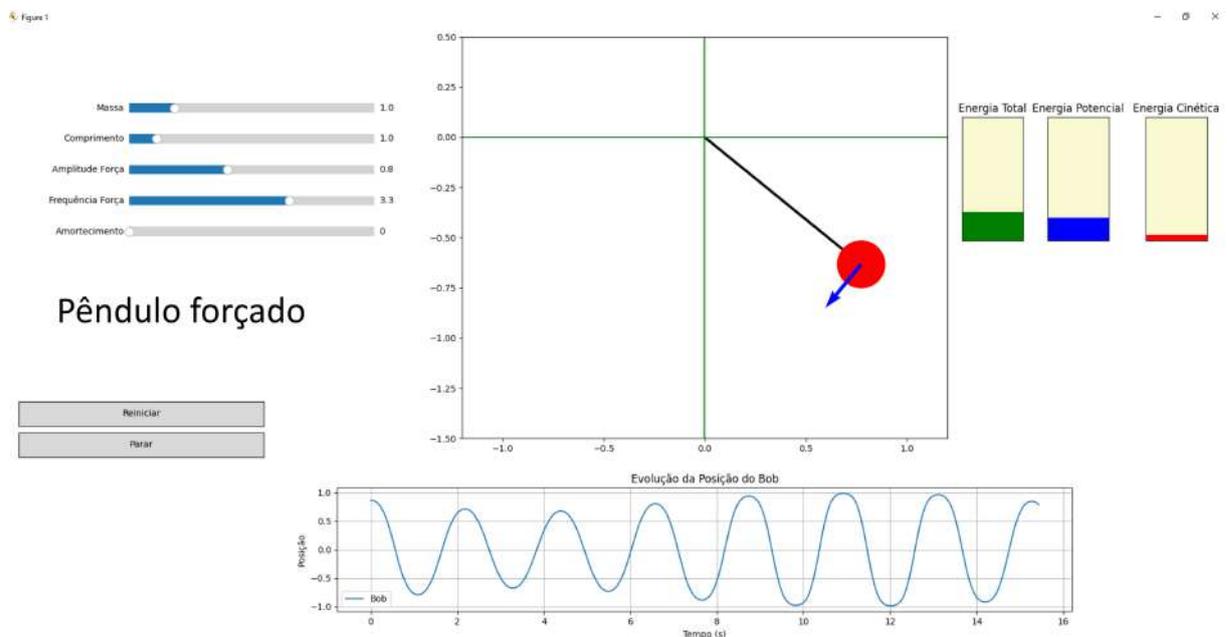
slider_mass.on_changed(update)
slider_length.on_changed(update)
slider_force_amp.on_changed(update)
slider_force_freq.on_changed(update)
slider_damping.on_changed(update)

plt.show() # PAGINA 04
```

Fonte: Autoria própria

A figura 3.26 apresenta a interface da simulação interativa de um pêndulo simples forçado, com a inclusão de barras de energia potencial, cinética e total. A animação exibe o movimento do pêndulo, com o bob (massa suspensa) sendo representado por um círculo vermelho, que oscila de acordo com a força periódica aplicada. O gráfico no eixo inferior mostra a evolução da posição do bob ao longo do tempo, enquanto, no gráfico superior direito, as barras de energia variam conforme o movimento do pêndulo, ilustrando as contribuições da energia cinética e potencial para a energia total. A visualização também permite a interação do usuário por meio de sliders, à esquerda, que ajustam parâmetros como a massa, o comprimento do fio, a amplitude e frequência da força aplicada, além do coeficiente de amortecimento, possibilitando explorar diferentes comportamentos do sistema. O gráfico de barras no canto superior direito exibe as energias de forma normalizada, oferecendo uma representação clara do comportamento dinâmico do pêndulo forçado.

Figura 3.26 – Interface da simulação de um pêndulo simples forçado



Fonte: Autoria própria

IV - SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE DOIS PÊNDULOS SIMPLES ACOPLADOS POR MOLA ELÁSTICA

Introdução

Este documento apresenta a descrição detalhada de um código desenvolvido para simular a dinâmica de dois pêndulos simples acoplados por uma mola elástica. O objetivo principal do programa é integrar numericamente as equações de movimento utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK-4). A implementação também inclui uma visualização interativa das trajetórias dos pêndulos e uma animação que ilustra o comportamento do sistema em tempo real.

Descrição do Código

Inicialmente, são definidas as constantes físicas do sistema, como a aceleração da gravidade $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, e os parâmetros ajustáveis, incluindo a massa m , o comprimento dos pêndulos L e a constante elástica da mola k . Os deslocamentos angulares iniciais e velocidades tangenciais dos dois pêndulos são definidos em radianos e metros por segundo, respectivamente. O intervalo de tempo $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ determina a resolução temporal da integração numérica.

As equações diferenciais que governam o sistema consideram as forças gravitacionais e a força restauradora da mola. Estas equações são resolvidas iterativamente com o método RK-4. A função `derivs` calcula as derivadas das variáveis de estado, enquanto a função `run_simulation` executa a integração para um número de passos correspondente ao tempo total de simulação.

Visualização Gráfica

A visualização do sistema é implementada com o uso do `matplotlib`. Duas janelas gráficas principais são configuradas: a primeira exhibe a animação dos pêndulos acoplados e a mola; a segunda mostra a evolução das posições dos bobs em função do tempo. Os pêndulos são representados por linhas conectadas a massas (bobs) desenhadas como círculos, enquanto a mola é modelada como uma linha ondulada. As posições angulares dos pêndulos são convertidas em coordenadas cartesianas para a animação.

A função `animate` atualiza a posição dos pêndulos e da mola a cada quadro da animação. A mola é gerada dinamicamente por meio de uma função que calcula uma curva ondulada conectando os dois bobs.

Interatividade

O programa inclui botões para controlar a execução da animação, como parar (`stop_animation`) ou reiniciar (`restart_animation`) a simulação. Além disso, sliders permitem ajustar os valores de m , L e k em tempo real. A função `update` é acionada sempre que os sliders são alterados, recalculando a dinâmica do sistema com os novos parâmetros.

Conclusão

Este programa é uma ferramenta educativa e interativa que permite explorar a dinâmica de sistemas acoplados de forma intuitiva. A visualização gráfica e os controles interativos tornam a experiência de simulação mais acessível, permitindo ajustar os parâmetros físicos e observar os efeitos em tempo real. Este código exemplifica a aplicação de métodos numéricos em problemas de física clássica e pode ser expandido para incluir efeitos dissipativos ou acoplamentos mais complexos.

As figuras apresentadas a seguir ilustram o código desenvolvido para esta simulação.

Figura 3.27 – Código da simulação de dois pêndulos simples acoplados por mola elástica
- página 1 de 4

PENDULO-DUPLO6-gpt4-whole2.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\DOUBLE\PENDULO-DUPLO6-gpt4-whole2.py (3.11.4)

File Edit Format Run Options Window Help

```

"""
# Código Python para simulação da dinâmica de Pêndulos Simples Acoplados com uma
Mola elástica

Este código implementa um simulador para a integração numérica da dinâmica de dois
pêndulos simples acoplados por uma mola elástica, utilizando o método de Runge-Kutta
de quarta ordem (RK-4). Ele permite visualizar as trajetórias dos dois pêndulos em
função do tempo, bem como ajustar interativamente os parâmetros de simulação.

## Funcionalidades Principais
1. **Integração numérica**:
   - As equações diferenciais que governam o sistema são resolvidas com o método RK-4.
   - As condições iniciais incluem deslocamento angular e velocidade inicial dos pêndulos.

2. **Gráficos interativos**:
   - Trajetórias dos pêndulos (posição angular) em função do tempo.
   - Representação gráfica dos pêndulos, mola e massas em movimento.

3. **Animação do sistema**:
   - Visualização da evolução do sistema em tempo real.
   - Representação gráfica da mola e dos bobs com movimento sincronizado.

4. **Interatividade**:
   - Ajuste de parâmetros como massa dos bobs, constante da mola e comprimento dos
   pêndulos via sliders.
   - Botões para parar e reiniciar a animação.

## Parâmetros Ajustáveis
- Massa dos pêndulos ( $m$ ): Entre 0,1 e 5,0 kg.
- Comprimento dos pêndulos ( $L$ ): Entre 0,5 e 5,0 metros.
- Constante elástica da mola ( $k$ ): Entre 0,001 e 0,1 N/m.

## Estrutura do Código
1. **Constantes iniciais**:
   - Massa, comprimento do pêndulo, constante da mola, gravidade, etc.
2. **Integração numérica**:
   - Cálculo iterativo da dinâmica do sistema com RK-4.
3. **Visualização gráfica**:
   - Representação das posições dos pêndulos, mola e trajetória em tempo real.
4. **Interatividade**:
   - Sliders e botões para controle da simulação.

## Referências
- Este programa foi projetado e implementado com base na metodologia de simulação de
  sistemas dinâmicos.
- Autor: N. M. Sotomayor; L. Y. A. Davila; RAFAEL MEDEIROS DE FREITAS. V. (Maio 2024).
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.widgets import Slider, Button
import matplotlib.animation as animation

# Constantes iniciais
initial_m = 1
initial_L = 1
initial_k = 0.01
g = 9.81 # aceleração devido à gravidade (m/s^2)

# Deslocamento angular inicial (rad) e velocidade tangencial (m/s) # PAGINA 01

```

Fonte: Autoria própria

Figura 3.28 – Código da simulação de dois pêndulos simples acoplados por mola elástica
- página 2 de 4

```
*PENDULO-DUPLO6-gpt4-whole2.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\DOUBLE\PENDULO-DUPLO6-gpt4-whole2.py (3.11.4)*
File Edit Format Run Options Window Help
# Deslocamento angular inicial (rad) e velocidade tangencial (m/s) # PAGINA 01
theta0, v0 = np.radians(60), 0
thetal, v1 = np.radians(30), 0

# Tempo de passo para integração numérica da equação de movimento (s).
dt = 0.01

# Inicializa as posições angulares e as velocidades tangenciais.
theta, v = [theta0], [v0]
theta2, v2 = [thetal], [v1]

# Número de períodos desejados
num_periods = 16 # Ajuste conforme necessário

# Tempo total de simulação
total_simulation_time = num_periods * (2 * np.pi * np.sqrt(initial_L / g))

def derivs(state, m, L, k):
    thetal, omegal, theta2, omega2 = state
    dthetal_dt = omegal
    domegal_dt = -(g / L) * np.sin(thetal) - (k / m) * (thetal - theta2)
    dtheta2_dt = omega2
    domega2_dt = -(g / L) * np.sin(theta2) + (k / m) * (thetal - theta2)
    return np.array([dthetal_dt, domegal_dt, dtheta2_dt, domega2_dt])

def run_simulation(m, L, k):
    theta, v = [theta0], [v0]
    theta2, v2 = [thetal], [v1]
    state = np.array([theta0, v0, thetal, v1])

    t = 0
    while t < total_simulation_time:
        k1 = derivs(state, m, L, k)
        k2 = derivs(state + 0.5 * dt * k1, m, L, k)
        k3 = derivs(state + 0.5 * dt * k2, m, L, k)
        k4 = derivs(state + dt * k3, m, L, k)
        state += dt / 6.0 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
        theta.append(state[0])
        v.append(state[1])
        theta2.append(state[2])
        v2.append(state[3])
        t += dt
    return theta, theta2

theta, theta2 = run_simulation(initial_m, initial_L, initial_k)

def get_coords(th, L):
    return L * np.sin(th), -L * np.cos(th)

def get_coords2(th2, L):
    return L * np.sin(th2) + 1, -L * np.cos(th2)

def plot_spring(x1, y1, x2, y2):
    num_coils = 20
    Ns = 1000
    L = np.sqrt((x2 - x1) ** 2 + (y2 - y1) ** 2)
    spring_length = L - 2 * bob_radius

    w = np.linspace(0, spring_length, Ns)
    xs = np.linspace(x1, x2, Ns) # PAGINA 02
```

Fonte: Autoria própria

Figura 3.29 – Código da simulação de dois pêndulos simples acoplados por mola elástica
- página 3 de 4

```
*PENDULO-DUPLO6-gpt4-whole2.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODES\DOUBLE\PENDULO-DUPLO6-gpt4-whole2.py (3.11.4)
File Edit Format Run Options Window Help
xs = np.linspace(x1, x2, Ns) # PAGINA 02
ys = np.linspace(y1, y2, Ns) + np.sin(w / spring_length * num_coils * 2 * np.pi) * 0.05

return xs, ys

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(12, 5))

# Ajustar a posição dos eixos da animação e do gráfico
ax1.set_position([0.3, 0.3, 0.6, 0.65])
ax2.set_position([0.3, 0.05, 0.6, 0.2])

x0, y0 = get_coords(theta0, initial_L)
x1, y1 = get_coords2(theta1, initial_L)
line1, = ax1.plot([0, x0], [0, y0], lw=3, c='k')
line2, = ax1.plot([1, x1], [0, y1], lw=3, c='k')
bob_radius = 0.12
bob_radius2 = 0.12
circle1 = ax1.add_patch(plt.Circle(get_coords(theta0, initial_L), bob_radius, fc='r', zorder=3))
circle2 = ax1.add_patch(plt.Circle(get_coords2(theta1, initial_L), bob_radius2, fc='b', zorder=3))

spring_xs, spring_ys = plot_spring(x0, y0, x1, y1)
spring_line, = ax1.plot(spring_xs, spring_ys, c='k', lw=2)

ax1.set_xlim(-initial_L * 1.2, initial_L * 2.2)
ax1.set_ylim(-initial_L * 1.5, initial_L * 0.5)

bob1_positions = []
bob2_positions = []

def animate(i):
    x, y = get_coords(theta[i], initial_L)
    line1.set_data([0, x], [0, y])
    circle1.set_center((x, y))
    x2, y2 = get_coords2(theta2[i], initial_L)
    line2.set_data([1, x2], [0, y2])
    circle2.set_center((x2, y2))

    spring_xs, spring_ys = plot_spring(x, y, x2, y2)
    spring_line.set_data(spring_xs, spring_ys)

    bob1_positions.append(x)
    bob2_positions.append(x2)

    plot_position_vs_time(i)

    return line1, line2, circle1, circle2, spring_line

nframes = len(theta)
interval = dt * 1000
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=nframes, repeat=True, interval=interval)

def plot_position_vs_time(i):
    ax2.clear()
    time_values = np.arange(0, i) * dt
    ax2.plot(time_values, bob1_positions[:i], label='Bob 1')
    ax2.plot(time_values, bob2_positions[:i], label='Bob 2')
    ax2.set_xlabel('Tempo (s)')
    ax2.set_ylabel('Posição')
    ax2.set_title('Evolução da Posição dos Bobs em Função do Tempo')
    ax2.legend()
    ax2.grid(True) # PAGINA 03
```

Fonte: Autoria própria

Figura 3.30 – Código da simulação de dois pêndulos simples acoplados por mola elástica
- página 4 de 4

```
*PENDULO-DUPLO6-gpt4-whole2.py - C:\Users\ADM\Desktop\CODOS\DOUBLE\PENDULO-DUPLO6-gpt4-whole2.py (3.11.4)*
File Edit Format Run Options Window Help
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=nframes, repeat=True, interval=interval)

def plot_position_vs_time(i):
    ax2.clear()
    time_values = np.arange(0, i) * dt
    ax2.plot(time_values, bob1_positions[:i], label='Bob 1')
    ax2.plot(time_values, bob2_positions[:i], label='Bob 2')
    ax2.set_xlabel('Tempo (s)')
    ax2.set_ylabel('Posição')
    ax2.set_title('Evolução da Posição dos Bobs em Função do Tempo')
    ax2.legend()
    ax2.grid(True)

def stop_animation(event):
    ani.event_source.stop()
    plot_position_vs_time(len(theta))

def restart_animation(event):
    ani.event_source.stop()
    ani.frame_seq = ani.new_frame_seq()
    bob1_positions.clear()
    bob2_positions.clear()
    ax2.clear()
    ani.event_source.start()

# Criação dos botões interativos
stop_button_ax = plt.axes([0.01, 0.3, 0.2, 0.04])
stop_button = Button(stop_button_ax, 'Parar')
stop_button.on_clicked(stop_animation)

restart_button_ax = plt.axes([0.01, 0.35, 0.2, 0.04])
restart_button = Button(restart_button_ax, 'Reiniciar')
restart_button.on_clicked(restart_animation)

# Sliders para ajustar massa, constante da mola e comprimento do pêndulo
ax_mass = plt.axes([0.03, 0.75, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')
ax_length = plt.axes([0.03, 0.7, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')
ax_k = plt.axes([0.03, 0.65, 0.2, 0.03], facecolor='lightgoldenrodyellow')

slider_mass = Slider(ax_mass, 'Massa', 0.1, 5.0, valinit=initial_m)
slider_length = Slider(ax_length, 'Length', 0.5, 5.0, valinit=initial_L)
slider_k = Slider(ax_k, 'k', 0.001, 0.1, valinit=initial_k)

def update(val):
    global theta, theta2, initial_m, initial_L, initial_k
    initial_m = slider_mass.val
    initial_L = slider_length.val
    initial_k = slider_k.val
    theta, theta2 = run_simulation(initial_m, initial_L, initial_k)
    ax1.set_xlim(-initial_L * 1.2, initial_L * 2.2)
    ax1.set_ylim(-initial_L * 1.5, initial_L * 0.5)
    ani.event_source.stop()
    ani.frame_seq = ani.new_frame_seq()
    ani.event_source.start()

slider_mass.on_changed(update)
slider_length.on_changed(update)
slider_k.on_changed(update)

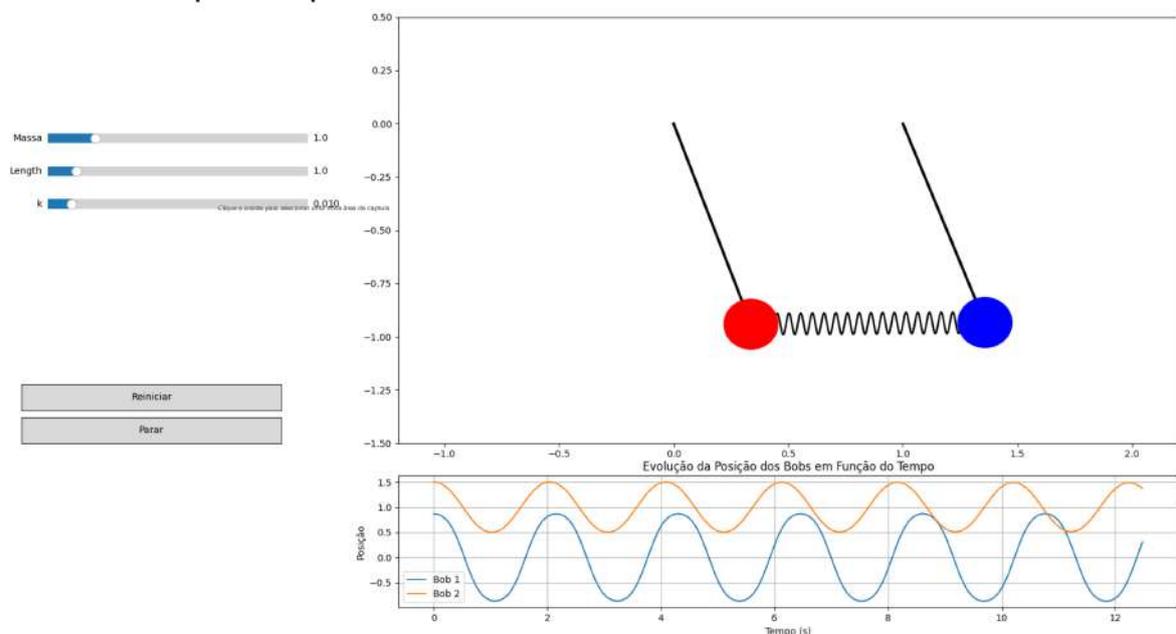
plt.show()
#PAGINA 04
```

Fonte: Autoria própria

A interface visualizada na imagem 3.31 exibe uma simulação interativa de dois pêndulos acoplados, com um gráfico abaixo mostrando a evolução das posições dos bobs ao longo do tempo. Na animação, dois pêndulos, representados por círculos vermelhos e azuis, estão conectados por uma mola, com os fios pendulares se movendo conforme o tempo passa. A mola ajusta-se à movimentação dos pêndulos, criando uma interação dinâmica entre eles. O gráfico abaixo da animação exibe a posição dos bobs em função do tempo, proporcionando uma visualização clara da evolução do sistema. A interface também contém controles interativos, como sliders para ajustar a massa dos bobs, o comprimento do fio e a constante da mola, permitindo ao usuário modificar as condições do sistema e observar as mudanças em tempo real. Além disso, há botões para parar ou reiniciar a animação, o que oferece maior flexibilidade na interação com a simulação.

Figura 3.31 – Interface da simulação de dois pêndulos simples acoplados por mola elástica

Pêndulo duplo acoplado



Fonte: Autoria própria

Os executáveis dos códigos desenvolvidos estão disponíveis no apêndice A deste trabalho, permitindo a execução das simulações de forma rápida e eficiente, sem a necessidade de ambiente de desenvolvimento ou compilação adicional. Esses arquivos oferecem uma interface acessível para rodar as simulações, tornando-as fáceis de utilizar e de distribuir, garantindo também um desempenho otimizado e a possibilidade de ajustar os parâmetros do sistema conforme necessário.

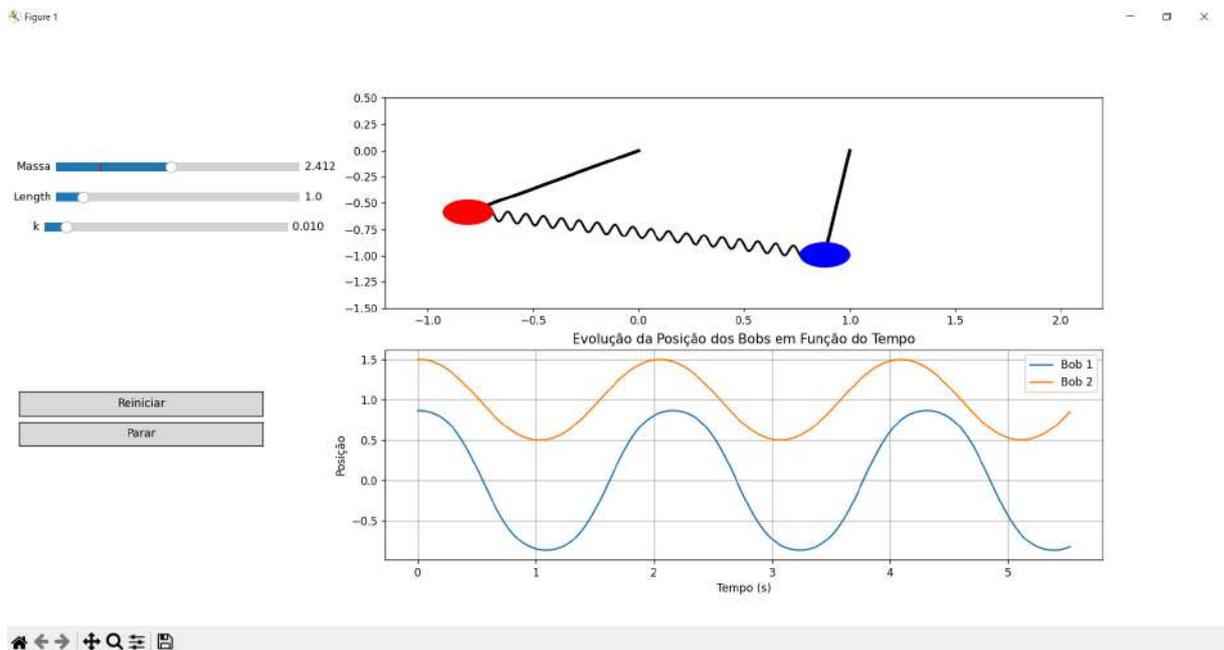
3.1.2.1.3 Variação dos Parâmetros dos Pêndulos Acoplados

Os códigos apresentados permitem a análise de diversas situações por meio da modificação dos parâmetros fundamentais do sistema. A seguir, são apresentadas três simulações do sistema de dois pêndulos simples acoplados por uma mola elástica, variando

parâmetros específicos como a massa pendular, o comprimento do fio e a constante elástica da mola. Essas variações têm como objetivo analisar o comportamento do sistema sob diferentes condições e observar como cada parâmetro influencia a dinâmica do movimento.

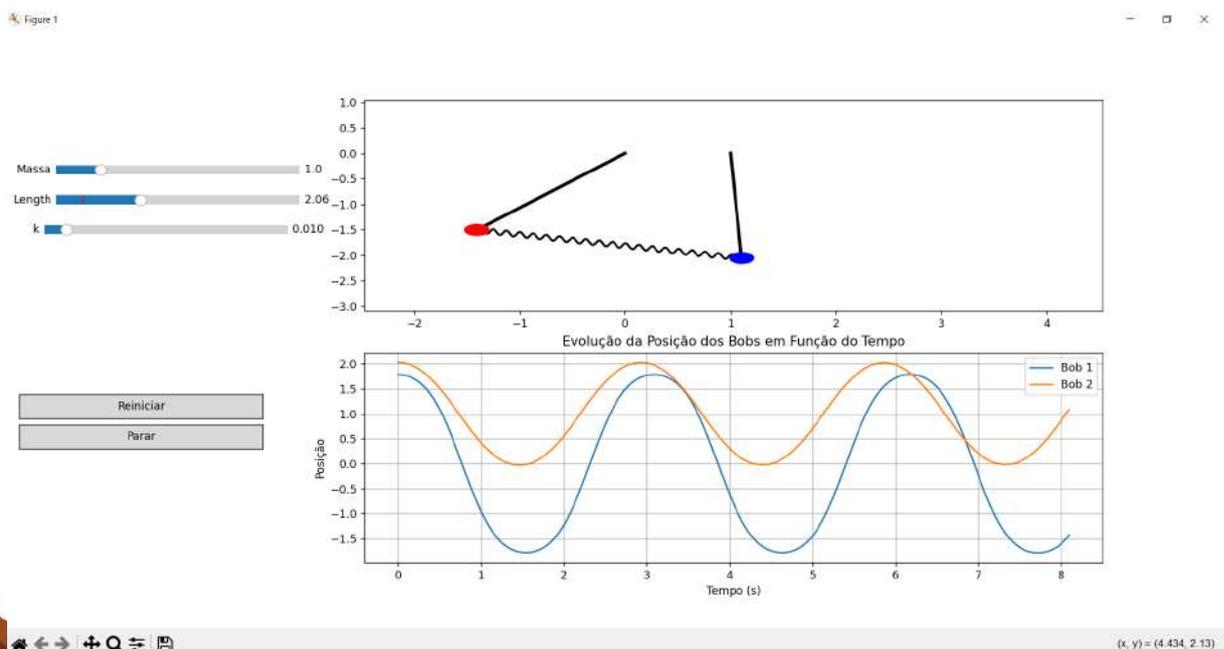
- **Simulação em Python com alteração da massa pendular**

Figura 3.32 – Alterando a massa pendular.



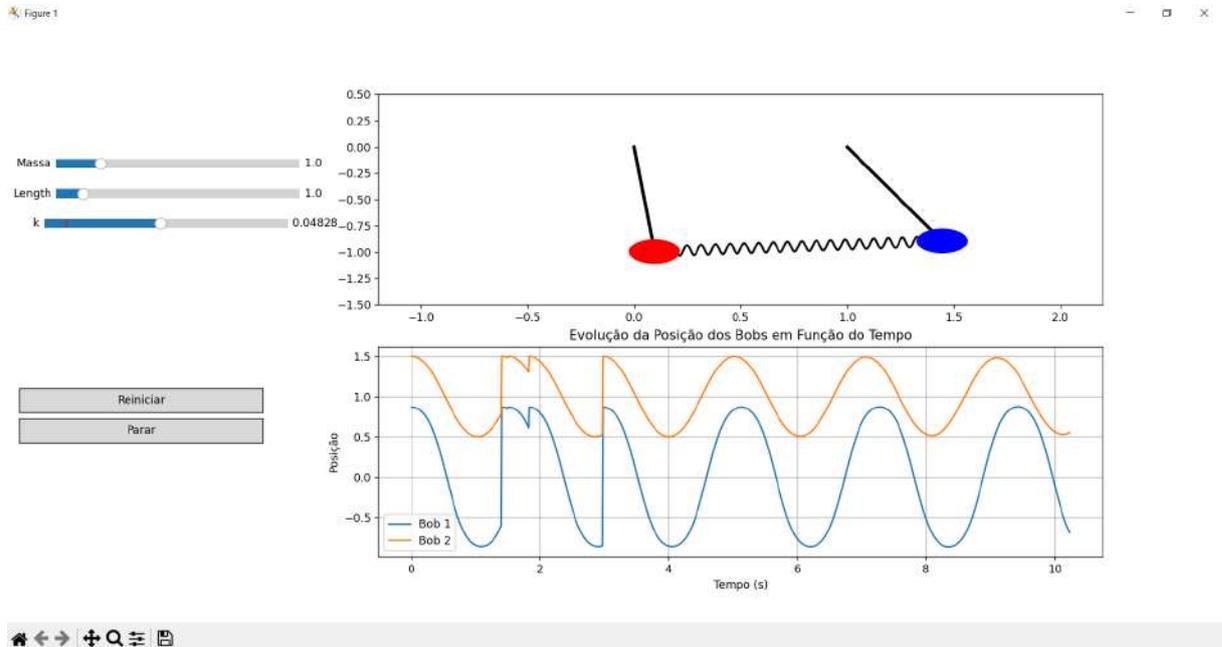
- **Alterando o comprimento dos fios**

Figura 3.33 – Simulação em Python com alteração do comprimento dos fios



- Alterando a constante elástica da mola

Figura 3.34 – Simulação em Python com alteração da constante elástica da mola

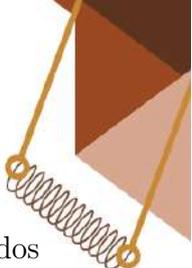


A interface mostrada na figura 3.31 apresenta o sistema de pêndulos acoplados por uma mola, representando o estado inicial da simulação com os valores padrão para os parâmetros ajustáveis: massa pendular, comprimento do fio e constante elástica da mola. O gráfico exibido na simulação apresenta um padrão básico de oscilação correspondente a esse estado inicial.

Na figura 3.32, visualiza-se que a massa pendular foi aumentada em relação à situação inicial. Como resultado dessa modificação, a frequência das oscilações diminuiu, e o sistema passou a apresentar movimentos mais lentos, com um período maior devido à maior inércia das massas pendulares. No gráfico, observa-se que as ondas se tornam mais espaçadas, indicando o aumento do período de oscilação. Quanto às energias, nota-se uma oscilação mais amortecida, com a troca entre energia cinética e potencial ocorrendo de maneira mais lenta.

Na figura 3.33, o comprimento do fio foi alterado. Essa modificação causou um aumento no período de oscilação, demonstrando a relação diretamente proporcional entre essas grandezas. No gráfico posição x tempo, as ondas aparecem mais espaçadas, refletindo o movimento mais lento. Além disso, é possível observar que, inicialmente, o sistema apresenta movimentos mais independentes, o que se traduz em padrões dessincronizados no início do gráfico.

Por fim, a figura 3.34 ilustra a modificação da constante elástica da mola. Quando aumentada, ela implica um incremento na força restauradora, permitindo uma sincronização mais rápida dos movimentos dos pêndulos. Nos gráficos, isso é evidenciado pelos dois pêndulos oscilando quase em fase. O aumento da constante elástica também resulta em maior energia potencial armazenada na mola, contribuindo para oscilações mais intensas e rápidas, além de uma frequência maior do movimento.



O código e o executável da simulação em Python de dois pêndulos simples acoplados por uma mola também estão disponíveis no apêndice deste trabalho (apêndice A1 e A2).

3.1.2.2 *Ambiente de Desenvolvimento Integrado (IDE) do Arduíno*

O Ambiente de Desenvolvimento Integrado (IDE) é onde ocorre a escrita do código e as instruções que são enviadas à placa controladora, sendo, dessa forma, indispensáveis para a programação e controle do microcontrolador Arduíno. Trata-se de um software de código aberto onde é permitido ao usuário escrever, compilar e transferir programas, ora chamados de “sketches” para a placa programadora, permitindo o desenvolvimento de projetos interativos e a automação de experimentos.

Graças ao seu caráter acessível e flexível, a plataforma tem se popularizado e vem sendo utilizada com frequência em contextos educacionais e de prototipagem. A utilização é bastante intuitiva, o que possibilita o uso eficiente mesmo por pessoas que não possuem um vasto conhecimento sobre programação. A linguagem derivada de C/C++ caracteriza-se como mais uma vantagem, visto que são linguagens democratizadas, sobretudo, na última década.

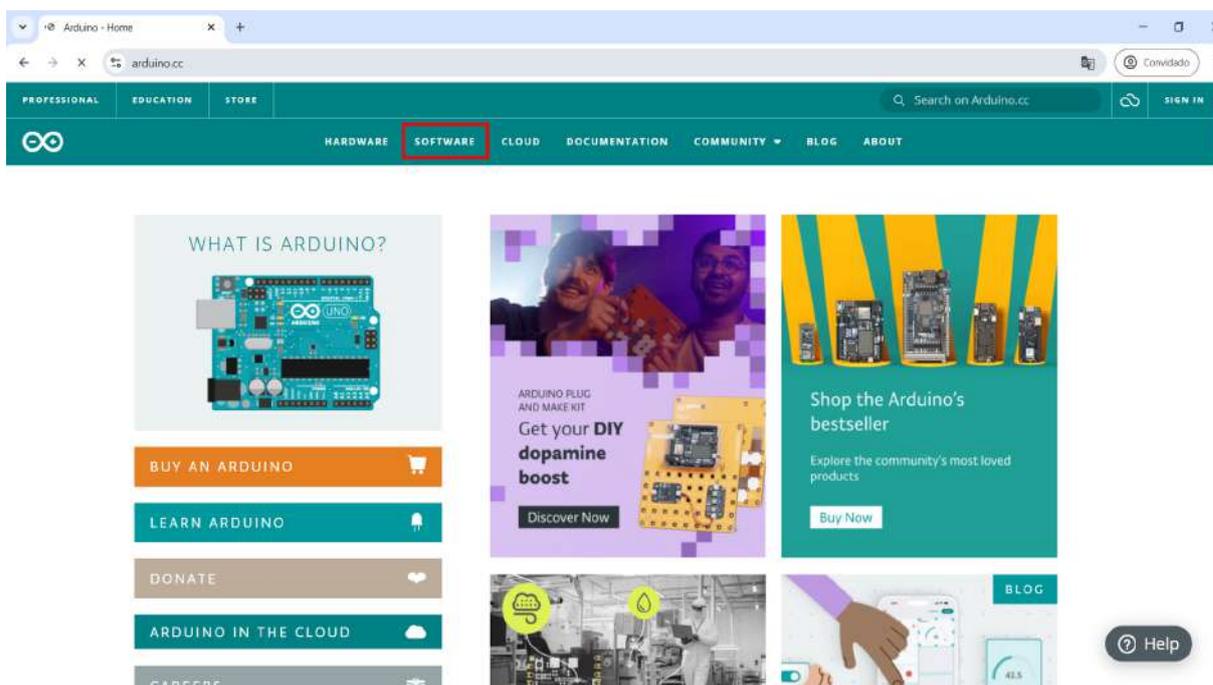
A IDE do Arduíno conta com a ferramenta integrada Serial Plotter, a qual permite visualizar graficamente os dados enviados pela porta serial. Ela é especialmente útil para monitorar em tempo real variáveis de sensores, resultados de cálculos, ou qualquer dado gerado pelo microcontrolador. A representação visual pode ajudar na análise e no entendimento do comportamento de sistemas dinâmicos.

3.1.2.2.1 **Instalação do Ambiente de Desenvolvimento Integrado (IDE)**

Para que o sistema experimental em que se esteja trabalhando funcione da maneira desejada, é indispensável a instalação e configuração correta da IDE. A instalação é bastante simples, como se pode observar nos passos a seguir.

Em um computador, com acesso à internet, é necessário acessar o endereço www.arduino.cc Uma vez no site, a tela mostrada na figura 3.35 estará disponível, então basta seguir os passos seguintes.

Figura 3.35 – Home page da plataforma Arduino

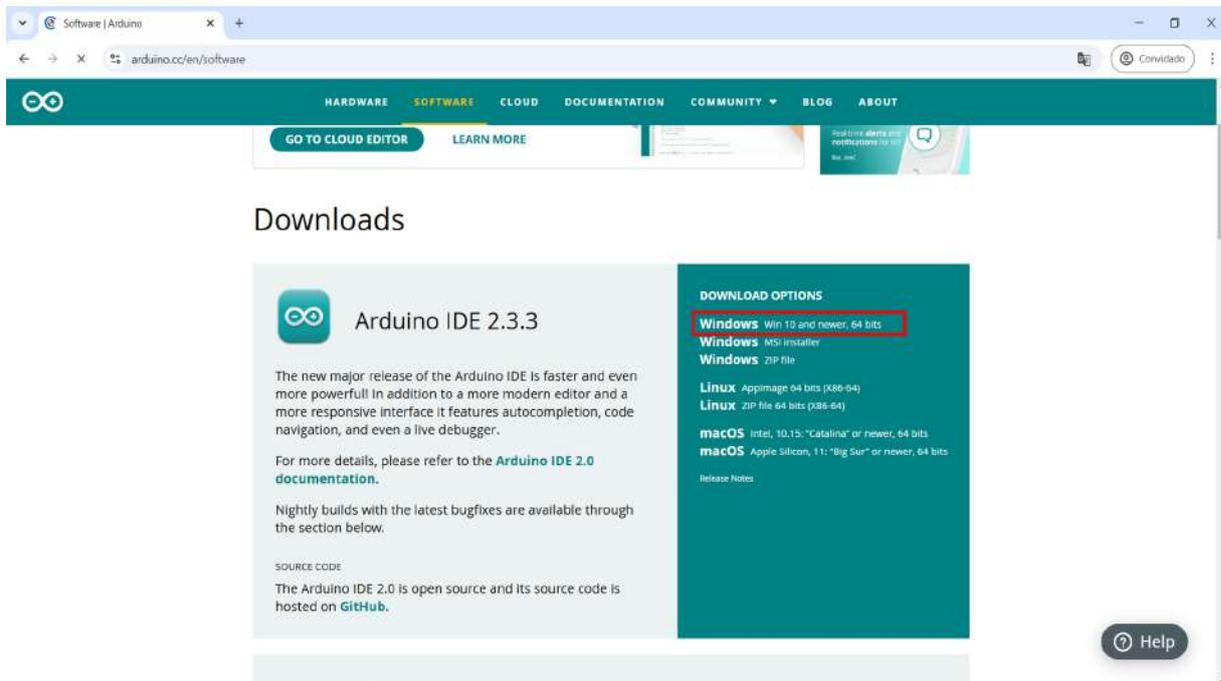


Fonte: Autoria própria

- 2º passo: Escolher o software de acordo com o sistema operacional do computador em que se deseja instalar a IDE.

Ao clicar na aba software, a tela seguinte (figura 3.36) mostrará as opções disponíveis para download. É necessário certificar-se do sistema operacional instalado na máquina a fim de baixar a versão compatível. Para essa exemplificação, será utilizado um computador com a versão Windows 10.

Figura 3.36 – Opções para download

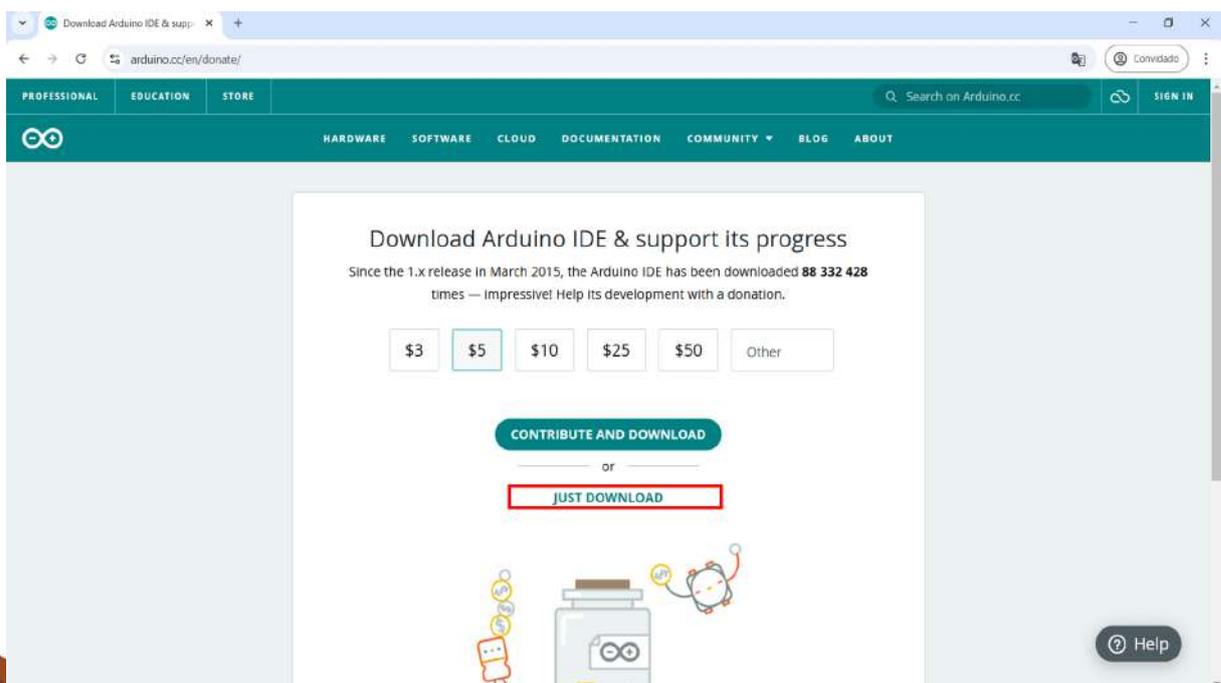


Fonte: Autoria própria

- 3º passo: Iniciando o download.

Ao clicar no sistema operacional, uma nova tela se abrirá (figura 3.37). Nessa tela há a opção de contribuir financeiramente com a plataforma. Entretanto, o acesso ao programa é gratuito e pode ser continuado clicando em “just download”.

Figura 3.37 – Iniciando o download



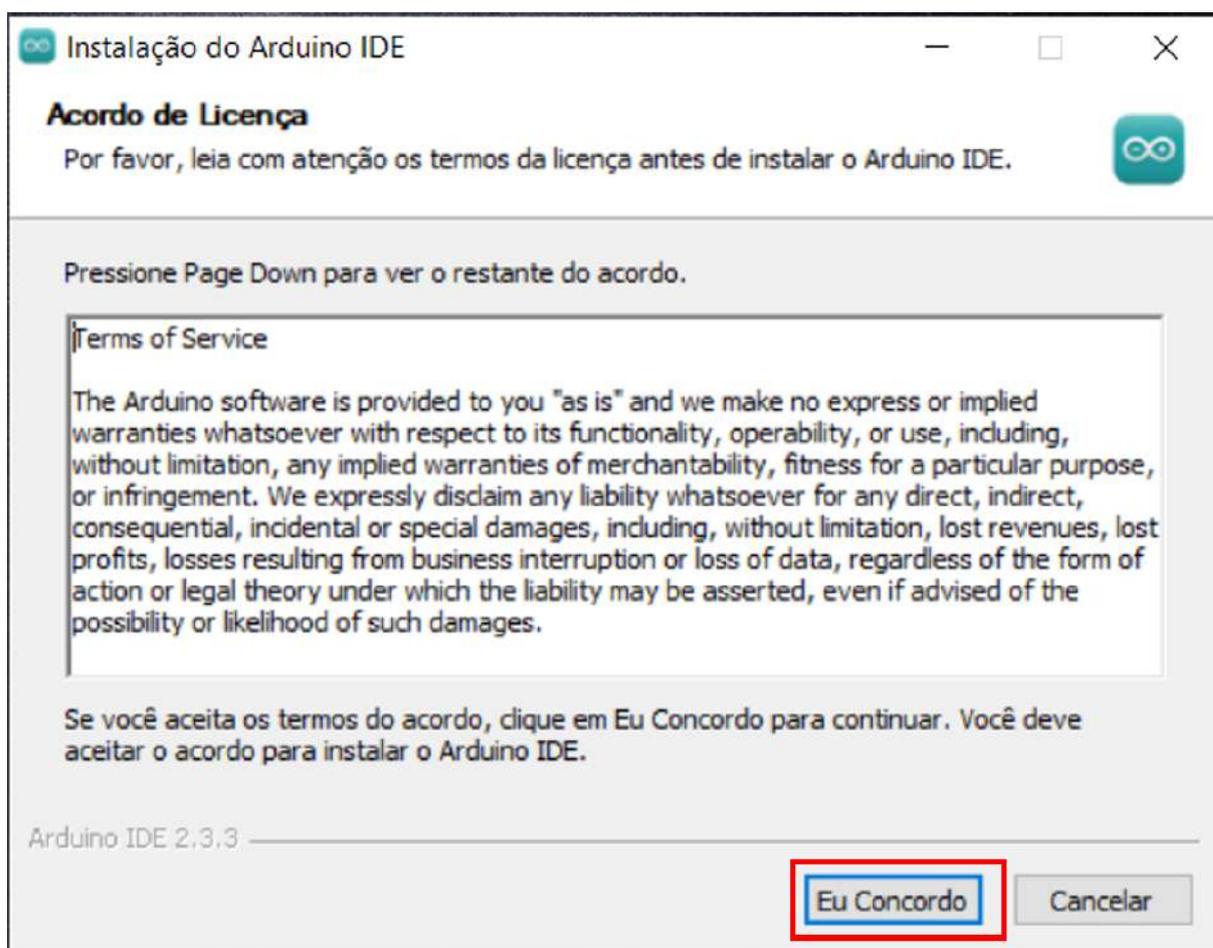
Fonte: Autoria própria

É possível que em alguns casos mais alguma tela abra após essa. Se ocorrer, basta clicar novamente em “just download” e o programa, então, iniciará o download.

- 4º passo: Instalação.

O passo seguinte é instalar o ambiente de desenvolvimento no computador. Para isso, é necessário localizar o arquivo na pasta de downloads e clicar duas vezes com o botão esquerdo do mouse. Ao fazer isso, uma tela de licença será mostrada (figura 3.38).

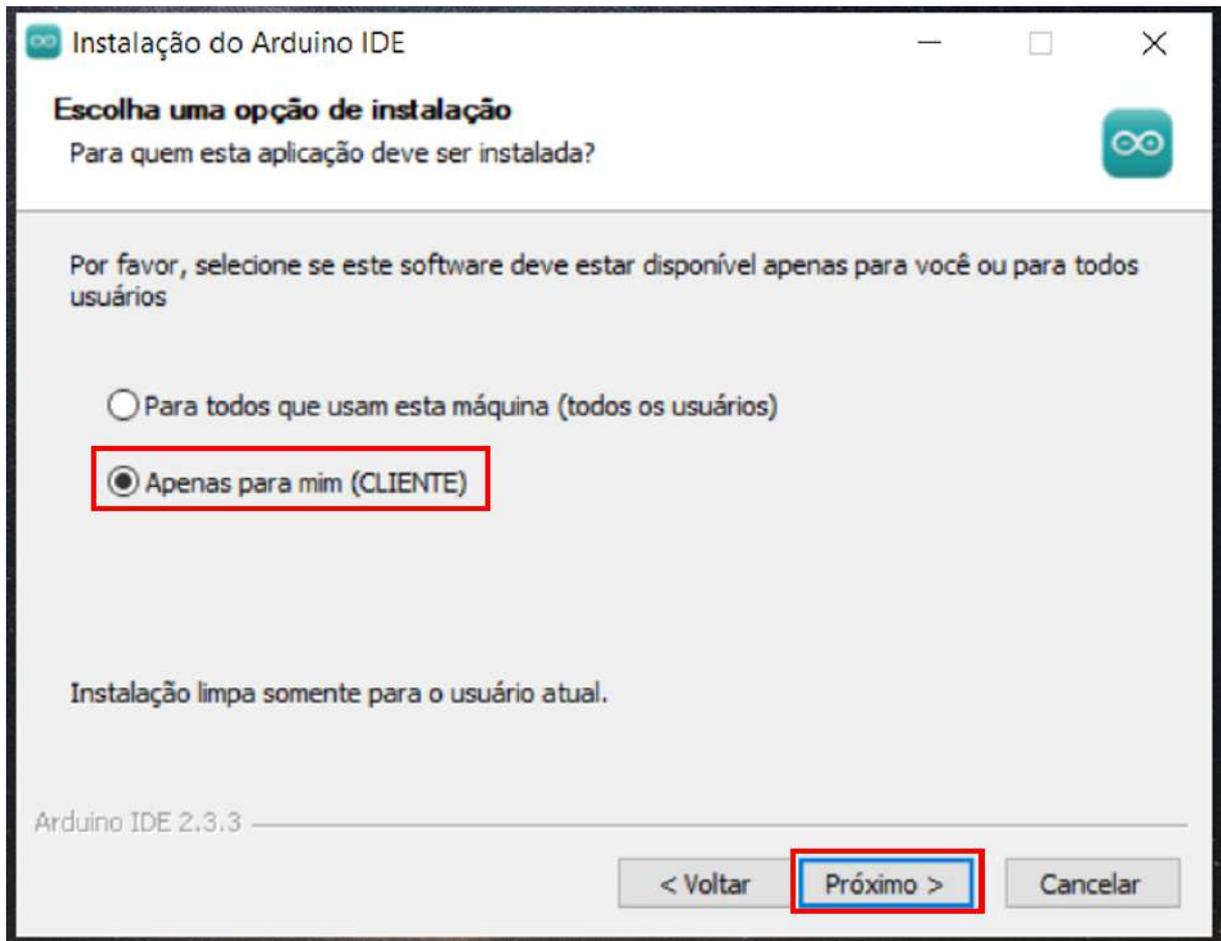
Figura 3.38 – Acordo de licença



Fonte: Autoria própria

Para prosseguir, basta clicar em “eu concordo” e uma nova tela será aberta (figura 3.39). Nesta, é possível optar entre instalar apenas para o usuário ou para todos os usuários da máquina, considerando que existam mais de um. Para essa demonstração, optou-se por instalar apenas para o usuário em execução.

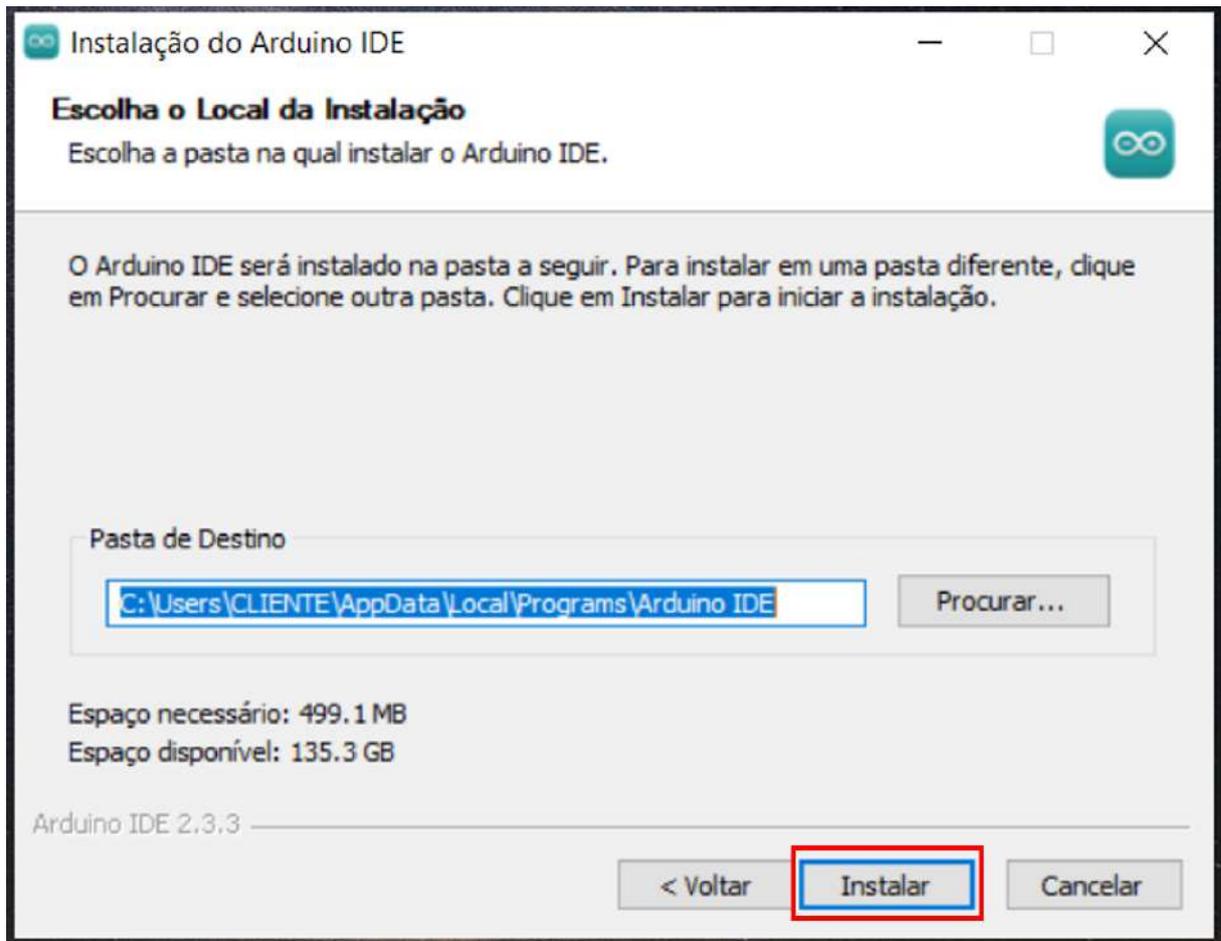
Figura 3.39 – Opções de instalação



Fonte: Autoria própria

Clicando em próximo, a tela seguinte será referente à escolha da pasta onde o usuário deseja instalar a IDE (figura 3.40).

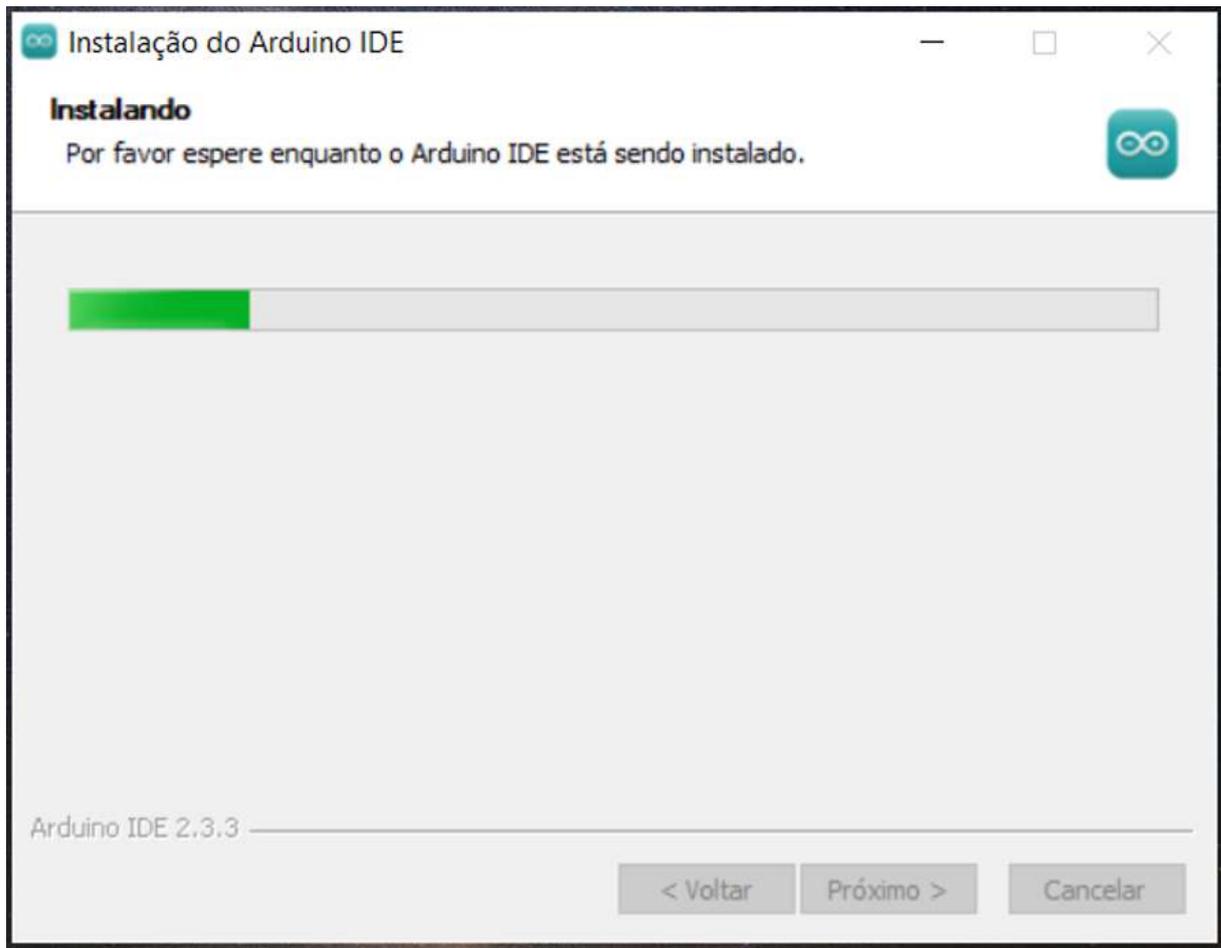
Figura 3.40 – Escolha da pasta de instalação



Fonte: Autoria própria

O programa já traz uma opção pré-definida, mas caso o usuário deseje uma opção diferente deve clicar em “procurar” e escolher a pasta pretendida. Caso contrário, basta clicar em “instalar” para iniciar a instalação. Durante o processo de instalação, a tela ficará carregando, como mostra a imagem 3.41. Esse processo geralmente é rápido, mas pode levar alguns minutos dependendo da máquina em uso.

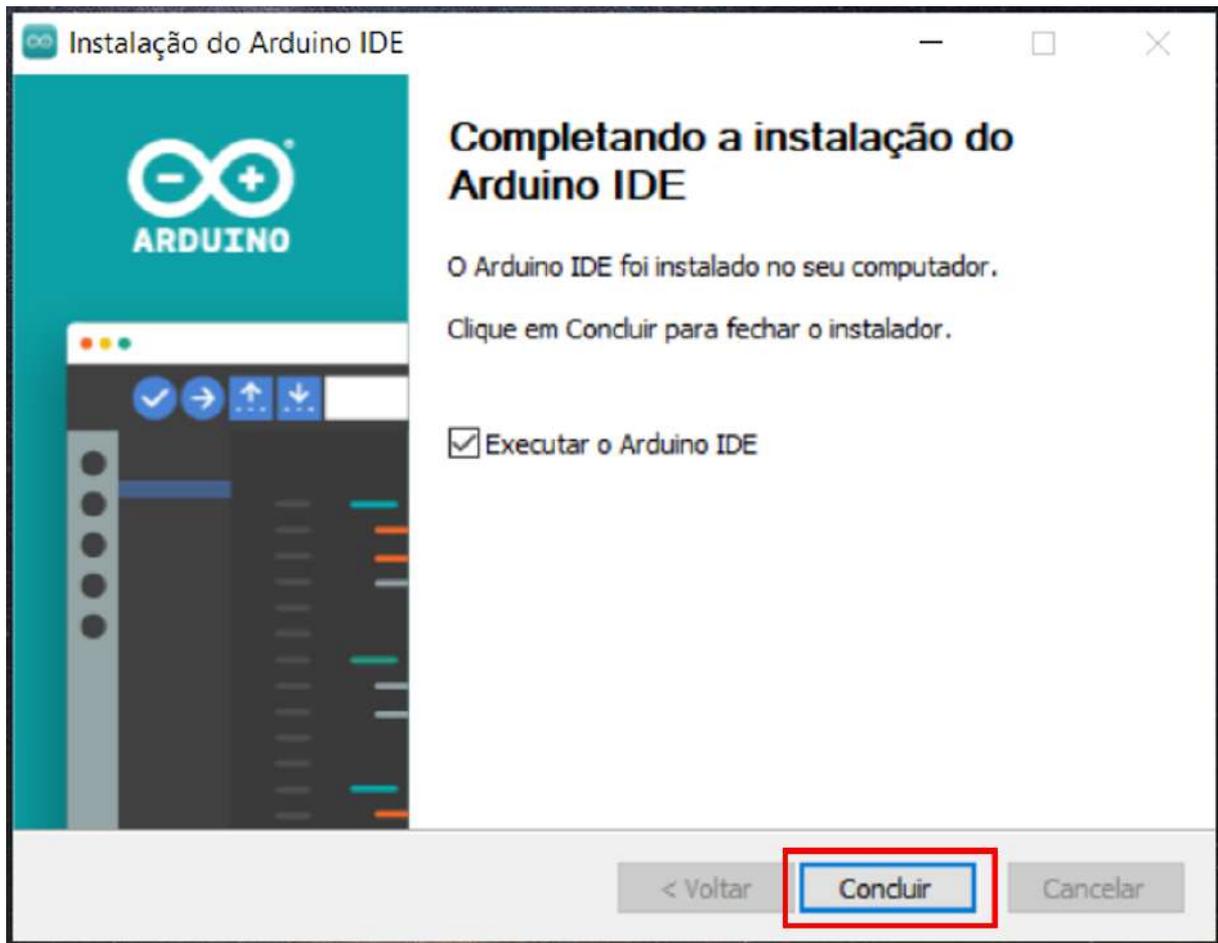
Figura 3.41 – Progresso da instalação



Fonte: Autoria própria

Uma vez carregado, a tela de conclusão será mostrada (imagem 3.42). Então, basta clicar em “concluir” para finalizar a instalação.

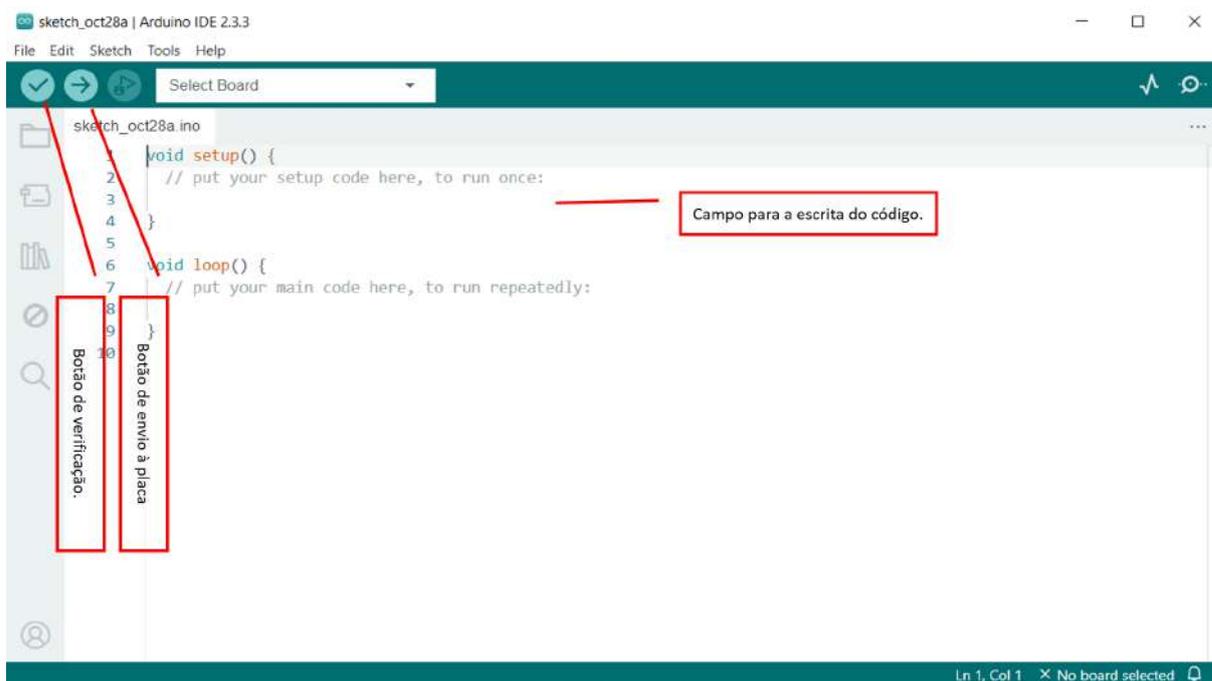
Figura 3.42 – Conclusão da instalação



Fonte: Autoria própria

Se a caixa de seleção “Executar o Arduino IDE” estiver marcada, como na imagem acima, a tela inicial da IDE iniciará e estará pronta para uso (imagem 3.43).

Figura 3.43 – Tela inicial da IDE



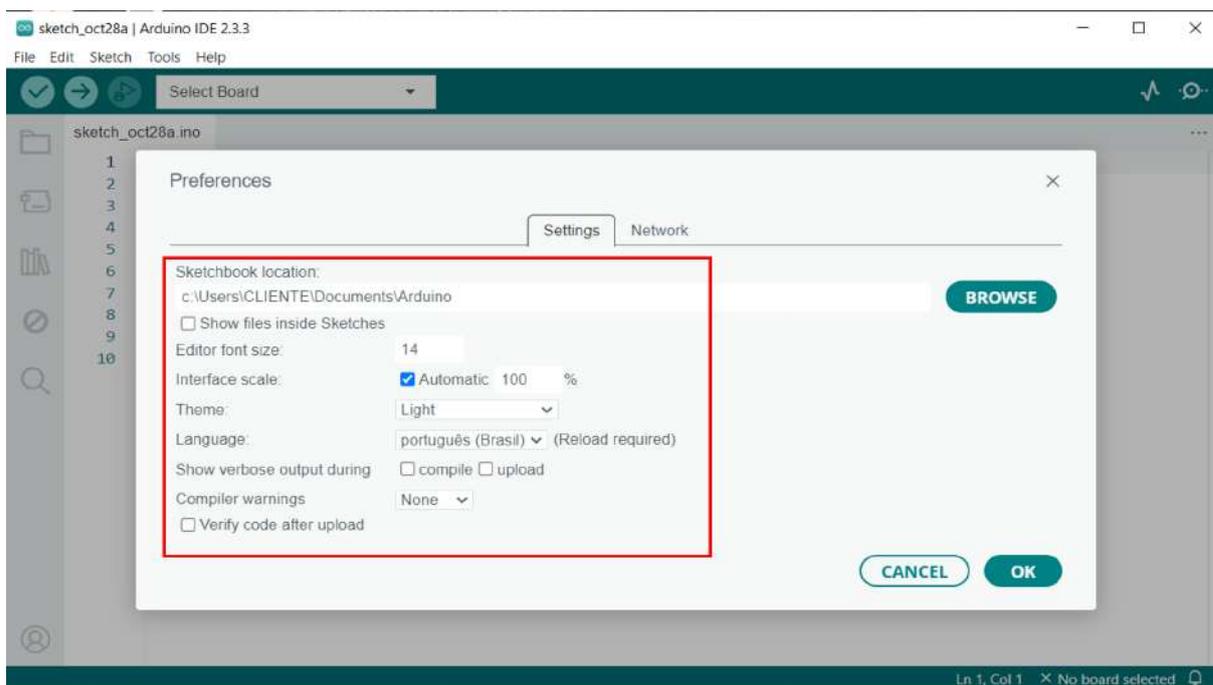
Fonte: Autoria própria

É nesse campo onde o código será escrito, verificado e enviado para a placa programável. Para a utilização da experiência proposta nesse trabalho, é necessário apenas copiar o código fornecido e colá-lo no campo mostrado na imagem acima e enviá-lo à placa.

- Passo 5: Ajustando as preferências.

Realizada a instalação, e uma vez com a tela inicial da IDE aberta, é possível ajustar algumas configurações de acordo com a necessidade ou predileção do utilizador. Clicando em "file" e depois em "preferences" abrirá a tela mostrada na imagem 3.44, onde é possível, entre outras coisas, alterar o tema, as dimensões e o idioma.

Figura 3.44 – Preferências



Fonte: Autoria própria

3.1.2.2.2 Código Arduino

O código desenvolvido no Arduino permite a medição precisa da posição angular dos encoders conectados ao sistema. Por meio de um processo automatizado, o Arduino monitora continuamente os sinais provenientes do encoder e calcula o ângulo de rotação, que é exibido em intervalos regulares. A funcionalidade principal do código é identificar mudanças nos sinais gerados pelo encoder e traduzir essas variações em incrementos ou decrementos no valor do ângulo, dependendo da direção do movimento do pêndulo.

Esses dados são utilizados para analisar o comportamento dinâmico do sistema, incluindo aspectos como a interação entre os pêndulos, o acoplamento e as propriedades oscilatórias. O código desenvolvido está disponível no apêndice B deste trabalho.

A figura 3.45 ilustra a interface do Serial Plotter da IDE do Arduino, ferramenta que permite a visualização gráfica dos dados transmitidos pelo microcontrolador em tempo real. A interface exibe as informações coletadas em forma de gráficos, permitindo identificar padrões de oscilação, amplitude e frequência.

Figura 3.45 – Teste do código Arduino



Fonte: Autoria própria

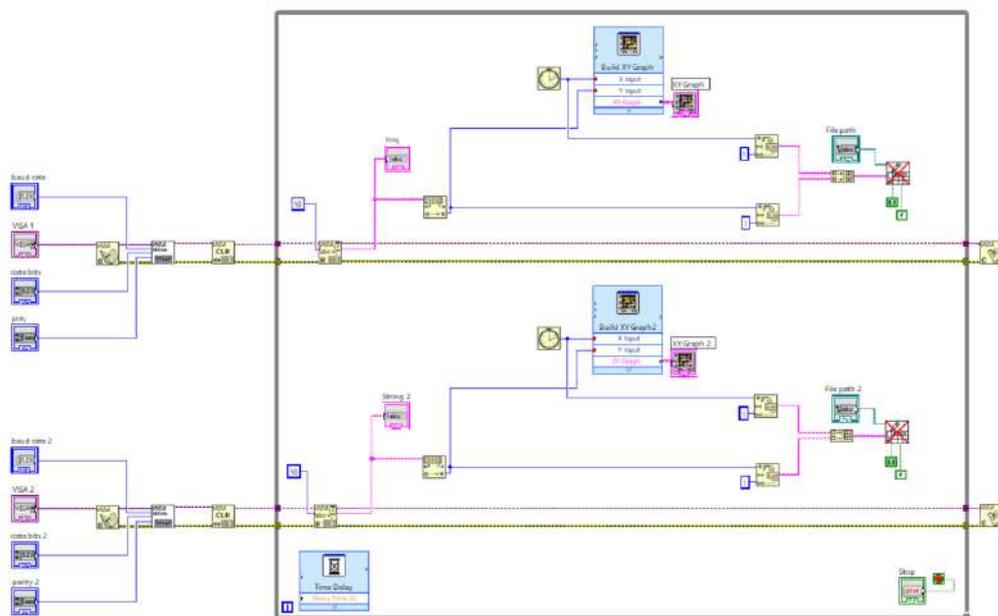
3.1.2.3 Ambiente gráfico de programação LabVIEW

Apesar da possibilidade de observação dos gráficos na própria plataforma Arduino, um código para este fim foi desenvolvido no ambiente de desenvolvimento e linguagem de programação gráfica Labview. O programa, assim como a ferramenta serial plotter do Arduino, também permite a apresentação gráfica dos resultados em tempo real de funcionamento do mecanismo com a vantagem de ser uma ferramenta que permite criar interfaces customizáveis, incluindo botões, indicadores digitais, controles deslizantes, entre outros componentes interativos.

Além dessas vantagens, o Labview ainda permite a conexão de vários dispositivos simultaneamente via diferentes interfaces (USB, Ethernet, Serial, etc.); permite salvar dados em arquivos como .csv, .txt ou bancos de dados automaticamente para análises posteriores; consegue gerenciar grandes volumes de dados de forma eficiente, permitindo o processamento e a visualização em alta frequência; facilita a geração de relatórios automatizados e detalhados, incluindo gráficos, tabelas e descrições, em formatos como PDF ou Word, entre várias outras possibilidades.

A figura 3.46 mostra o diagrama de blocos do código desenvolvido no Labview para a visualização dos gráficos. Essa configuração organiza os elementos de um programa em blocos funcionais e conexões visuais que representam o fluxo de dados entre esses blocos.

Figura 3.46 – Diagrama de blocos em LabVIEW



LabVIEW™ Evaluation Software

Fonte: Autoria própria

A organização estrutural do diagrama de blocos acima conta com três entradas (Baud Rate, Data Bits e Parity). Essas entradas definem os parâmetros de comunicação serial (taxa de transmissão, número de bits de dados e verificação de paridade) para conectar o dispositivo externo ao sistema LabVIEW. São essenciais para garantir que o software se comunique corretamente com o hardware. Para gerenciar a comunicação serial com os dispositivos, é utilizada a biblioteca Virtual Instrument Software Architecture (VISA). Ela configura a porta serial para iniciar a troca de dados.

Os dados recebidos da comunicação serial são armazenados como strings, sequências de caracteres ASCII (American Standard Code for Information Interchange) que podem ser exibidas ou não. As strings são convertidas em números, permitindo que os dados sejam tratados como entradas para cálculos ou gráficos.

Após essa conversão, o controle gráfico XY (*Build XY Graph*) recebe os dados, agora numéricos, e os organiza para gerar gráficos XY em tempo real. A entrada *X Input* representa o eixo X (geralmente uma variável independente, como o tempo nesse caso), enquanto *Y Input* corresponde ao eixo Y (a variável dependente medida ou simulada, nesse caso, o deslocamento angular). O bloco *XY Graph* representa os gráficos finais que mostram a relação entre as variáveis monitoradas (tempo e deslocamento angular).

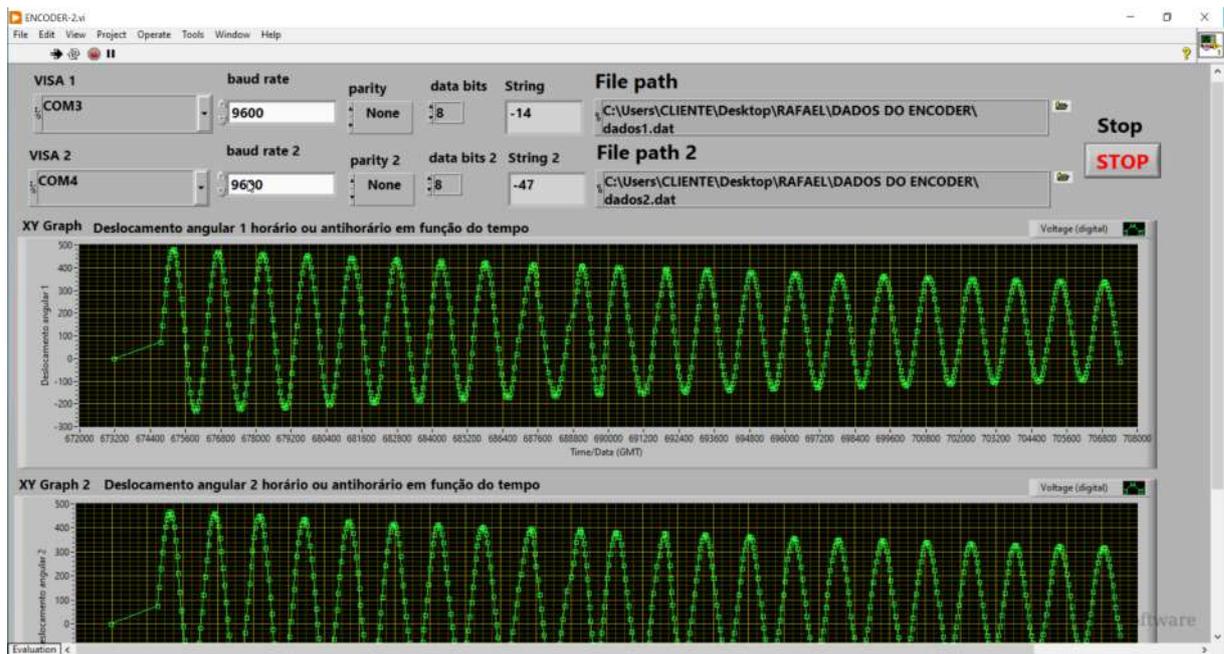
Quanto ao armazenamento de dados, o bloco *File Path* define o caminho do arquivo onde os dados recebidos serão armazenados. É utilizado para salvar os dados em formato texto ou planilha, permitindo análises posteriores. Já o *Write to Text File* salva os dados recebidos no formato de texto. Isso é útil para registrar os resultados da aquisição de dados em tempo real.

O laço *While* é usado para manter o programa em execução enquanto a condição de parada (botão *Stop*) não for acionada. Ele garante a continuidade da leitura de dados e atualização dos gráficos em tempo real. O *Time Delay* garante que a leitura dos dados

ocorra em intervalos regulares, evitando sobrecarga no sistema. O tempo de atraso entre cada ciclo do *laço While* é configurado para sincronizar a coleta de dados. Por fim, o botão de parada *Stop* permite ao usuário interromper a execução do programa de forma controlada. Ao pressionar este botão, o *laço While* termina e o programa finaliza sua execução.

A figura 3.47 mostra a interface do programa, onde é possível visualizar os elementos descritos acima, bem como os gráficos gerados do movimento oscilatório dos dois pêndulos simples acoplados pela mola de pequena constante elástica.

Figura 3.47 – Interface do Labview



Fonte: Autoria própria

4 APLICAÇÃO

Neste trabalho, utilizar-se-á a metodologia de sequências de ensino investigativo com demonstração experimental. Essa metodologia configura-se como uma abordagem pedagógica cujo objetivo é promover a aprendizagem ativa e o desenvolvimento de habilidades científicas nos estudantes, por meio da realização de investigações e experimentos práticos em sala de aula.

Essa sequência de ensino geralmente é dividida em três fases: a primeira é a fase exploratória, em que os estudantes são convidados a observar e descrever um fenômeno ou problema a ser investigado. Na segunda etapa, chamada de investigação propriamente dita, os estudantes são orientados a formular hipóteses, planejar e realizar experimentos para testar suas hipóteses. Na terceira etapa, a fase de comunicação, os estudantes são estimulados a compartilhar seus resultados com a classe, discutir suas descobertas e refletir sobre o processo investigativo (CARVALHO, A. M. P. de, 2018).

A demonstração, quando trabalhada de forma investigativa, ganha caráter representativo e ilustrativo de conceitos científicos de forma prática e visual. Através dela, o professor pode mostrar aos estudantes os efeitos e resultados esperados de um experimento, antes que eles o realizem de fato.

4.1 Etapas da Sequência de Ensino Investigativo (SEI)

A Sequência de Ensino Investigativo vem ganhando notoriedade dentro do contexto das metodologias ativas graças ao seu potencial em promover a aprendizagem significativa. No Brasil, uma das principais referências é a professora Anna Maria Pessoa de Carvalho, cuja dedicação à adaptação para diversos contextos, à formação de professores e à pesquisa contribuiu para tornar a SEI uma metodologia eficaz e amplamente reconhecida na educação brasileira.

Segundo [Anna Maria Pessoa de Carvalho \(2022\)](#), tal metodologia trata-se de um procedimento pedagógico que tem como objetivo promover a aprendizagem ativa e o desenvolvimento de habilidades científicas nos alunos por meio da realização de experimentos práticos em sala de aula.

A aplicação da Sequência de Ensino Investigativo, apesar das possíveis variações, pode ser dividida em três etapas: apresentação ou manipulação do material experimental e proposição do problema; identificação e exploração das hipóteses/previsões dos alunos; e elaboração de possíveis planos de ação e execução do planejado.

A Figura 4.1 mostra, de forma resumida, como normalmente a metodologia apresentada se estabelece.

Figura 4.1 – Sequência de Ensino Investigativo



Fonte: Autoria própria

Apesar das claras definições de fases que essa metodologia abrange, e que são mostradas a seguir, a SEI possui variações, o que a torna um instrumento dinâmico e não delimitado em etapas restritas. É comum perceber essas variações quando se tem aplicações de problemas experimentais complexos ou sensíveis que não permitem a manipulação pelo próprio aluno. Nesse caso, por exemplo, o aluno inicia como observador e a SEI configura-se com caráter demonstrativo. Em outros casos, com experimentos cuja manipulação descarta a possibilidade de dano ao aluno, ele pode participar ativamente desde a construção até a realização do experimento.

4.1.1 Introdução e Motivação

Na etapa inicial, o objetivo é despertar o interesse dos alunos pelo tópico a ser estudado e motivá-los para a investigação científica. Isso é fundamental para criar um ambiente propício à aprendizagem e à curiosidade. Algumas das atividades típicas nesta fase incluem:

- ***Ativação do conhecimento prévio***

O mediador inicia com perguntas norteadoras a fim de perceber o que os alunos já sabem sobre o assunto em questão. Isso ajuda a identificar as ideias pré-concebidas dos alunos e a criar uma base para a construção do conhecimento.

- ***Apresentação do tópico***

O professor apresenta o tópico de estudo de maneira instigante e relevante para a vida dos alunos, mostrando sua importância e aplicações práticas. Nessa etapa, é importante a adequação da linguagem, visto que, no primeiro momento, os termos técnicos não terão tanto significado para o aluno.

- ***Contextualização***

É importante contextualizar a prática dentro do currículo escolar e da vida cotidiana dos alunos, explicando como ele se relaciona com outros conceitos e temas. A aplicação de uma SEI, quando não é rotineira, pode gerar no aluno a ideia de singularidade, podendo este entender como uma atividade extra e sem relação com o restante do currículo ou com assuntos anteriores.

- ***Questionamento***

O professor estimula os alunos a fazerem perguntas sobre o tópico, promovendo a curiosidade e a investigação. Esse processo também serve como verificação do entendimento da proposta. Ao questionar, o aluno demonstra o nível de clareza quanto à situação. O mediador atento consegue discernir quando sua explicação não foi tão eficaz a partir das questões colocadas pelos estudantes.

4.1.2 **Investigação e Exploração**

Nesta segunda etapa, os alunos são envolvidos em atividades práticas de investigação, onde exploram, coletam dados, manipulam experimentos e investigam a proposta trabalhada na SEI em profundidade. Podemos destacar como características desta fase:

- ***Atividades práticas***

Os estudantes participam de atividades práticas que envolvem a coleta de dados, experimentação e/ou observação. Eles podem trabalhar individualmente ou em grupos, dependendo da natureza do projeto. Apesar das interações defendidas por Vygotsky, a aplicação da SEI não está restrita à ocorrência em equipes.

- ***Mediação do professor***

O professor atua como um mediador durante boa parte do processo, no entanto, nessa etapa, ele age de maneira a orientar, esclarecer dúvidas e fornecer recursos e suporte quando necessário, mas sem interferir na organização das ideias dos indivíduos, permitindo assim que os alunos conduzam suas próprias investigações..

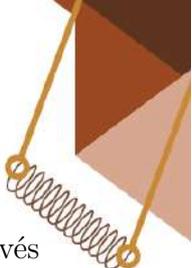
- ***Registro de dados***

Ainda nessa etapa da SEI, os alunos registram e analisam os dados coletados, fazem anotações e formulam hipóteses à medida que avançam em suas investigações. A colaboração entre eles é incentivada, promovendo discussões e compartilhamento de ideias.

4.1.3 **Síntese e Compartilhamento**

Na última etapa, os alunos consolidam suas descobertas e compartilham-nas com a turma. Isso proporciona reflexão, diálogo e aplicação do conhecimento adquirido. Algumas atividades que configuram essa etapa incluem:

- ***Apresentação dos resultados***



Os estudantes socializam suas descobertas e elucidações para a turma através de relatórios, apresentações orais, experimentos ou outras formas de comunicação.

- ***Discussão e reflexão***

Os estudantes discutem os resultados obtidos pela equipe expositora, observam e analisam as implicações do exposto com os conceitos estabelecidos anteriormente ou com suas próprias descobertas.

- ***Aplicação do conhecimento***

O mediador incentiva os estudantes a aplicar o conhecimento construído em situações mais abrangentes ou diferentes das trabalhadas inicialmente. A proposta deve encorajá-los em investigações mais complexas ou relacionadas com o mundo real.

4.2 Aplicação do produto

Tendo como base a Sequência de Ensino Investigativo (SEI), a metodologia utilizada na aplicação desse trabalho pode ser dividida em duas fases: discussões sobre os conteúdos que fundamentam o aparato experimental numa abordagem expositiva, fomentada por demonstrações simples e práticas, tendo como centro de interesse o aluno; e investigação prática do aparato, com manuseio, interpretação e formulação de hipóteses por parte dos estudantes, baseados no que foi visto na introdução teórica.

Reconhece-se que a introdução de práticas investigativas requer, em muitos casos, uma etapa inicial que assegure que os participantes dominem os conceitos e as ferramentas básicas necessárias para a realização de investigações mais profundas. Dada a complexidade do sistema experimental escolhido — dois pêndulos acoplados por uma mola — e os conteúdos a ele associados, optou-se por estruturar cinco encontros com abordagem expositiva e dialogada, com foco em apresentar os conceitos teóricos e as ferramentas fundamentais. Essa etapa foi planejada para promover uma base sólida de conhecimento, facilitando a transição dos estudantes para a etapa de investigação prática.

No sexto encontro, desenvolve-se uma atividade investigativa que contempla todas as etapas da metodologia SEI (problematização, construção de hipóteses, planejamento experimental, coleta e análise de dados e discussão de resultados). Essa abordagem permite que os estudantes apliquem os conhecimentos adquiridos nos encontros anteriores de forma autônoma e crítica, integrando os princípios da metodologia investigativa ao desenvolvimento prático.

Ao estruturar a aplicação dessa maneira, buscou-se equilibrar o aprofundamento conceitual e o desenvolvimento das habilidades investigativas, mantendo a coerência com os objetivos da metodologia SEI e maximizando o potencial de aprendizado dos estudantes.

A tabela a seguir (tabela 4.1) mostra a estruturação dos encontros, bem como as atividades a serem desenvolvidas em cada um deles. A organização dos conteúdos desenvolvidos em cada encontro e o roteiro de aplicação da SEI podem ser vistos no apêndice C deste produto.

Encontro	Objetivo	Atividades	Resultado Esperado
1º	Identificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre os conceitos básicos da Física.	<ul style="list-style-type: none"> - Aplicação de um questionário diagnóstico. - Discussão inicial sobre a percepção da Física no cotidiano. 	Mapeamento dos conhecimentos prévios e principais dificuldades.
2º	Introduzir os fundamentos da Física e situar seu papel na compreensão de fenômenos naturais.	<ul style="list-style-type: none"> - Apresentação teórica: - Objeto de estudo da Física. - Conceitos de sistemas físicos. - Importância da Física Newtoniana. 	Compreensão inicial dos fundamentos da Física como ciência.
3º	Explorar os conceitos de energia cinética, potencial e conservação da energia mecânica.	<ul style="list-style-type: none"> - Demonstrações práticas simples. - Vídeos curtos e simulações sobre transformação de energia. - Discussão sobre aplicações em sistemas reais. 	Relacionar os conceitos de energia a fenômenos observáveis e compreendê-los.
4º	Conceituar força restauradora e explorar sua relação com movimentos oscilatórios.	<ul style="list-style-type: none"> - Introdução à Lei de Hooke e à força elástica com experimentos simples. - Discussão sobre força restauradora. - Representação gráfica. 	Entendimento da força elástica e sua aplicação em sistemas físicos.
5º	Abordar o MHS e aplicar os conceitos ao pêndulo simples.	<ul style="list-style-type: none"> - Apresentação dos conceitos de MHS, amplitude, frequência e período. - Experimento prático com pêndulos. - Discussão sobre aplicações práticas. 	Capacidade de relacionar os conceitos de MHS e pêndulo simples à prática experimental.
6º	Aplicar os conceitos de energia mecânica, forças restauradoras e movimentos oscilatórios.	<ul style="list-style-type: none"> - Problema investigativo: Conservação de energia em sistemas oscilatórios. - Planejamento e execução de experimentos pelos alunos. - Discussão. 	Desenvolvimento do raciocínio científico, integração dos conceitos e apresentação de conclusões.

Tabela 4.1 – Sequência de aulas

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo principal a promoção de um ensino de Física inovador e motivador, por meio de um produto educacional integrado. Esse produto, composto por um sistema experimental com aquisição automática de dados e um e-book estruturado como manual de construção e aplicação, busca explorar os conceitos relacionados à Mecânica, com ênfase em sistemas não lineares, como os pêndulos acoplados. A proposta, fundamentada na Sequência de Ensino Investigativo (SEI), é difundida no Brasil por Anna Maria Pessoa de Carvalho, priorizando o aprendizado ativo, investigativo e significativo.

A experimentação, enquanto estratégia de ensino, sempre se mostrou uma ferramenta eficaz para superar os entraves relacionados à complexidade atribuída à abstração dos conceitos físicos. Quando integrada à tecnologia, demonstra que avanços tecnológicos, como sensores, softwares e simulações, podem enriquecer ainda mais o processo de ensino e aprendizagem. No presente trabalho, esses recursos ofereceram aos estudantes uma forma mais interativa e visual de explorar fenômenos físicos, conectando o conteúdo teórico à prática de maneira concreta e significativa.

Apesar das limitações frequentemente enfrentadas, como restrições de infraestrutura e a necessidade de capacitação dos professores no uso das ferramentas tecnológicas, o trabalho destaca a viabilidade de integrar práticas experimentais ao ensino de Física, mesmo em contextos desafiadores, como o das escolas públicas no Brasil. A utilização de recursos de baixo custo, associados a metodologias bem estruturadas, mostra-se uma alternativa viável para ampliar o acesso dos estudantes a uma aprendizagem mais dinâmica e prática. Isto, por sua vez, abre espaço para a implementação de práticas semelhantes em outras áreas do conhecimento, não se restringindo apenas ao ensino de Física.

Com base na experiência vivenciada desde a construção até a aplicação, conclui-se que o produto educacional desenvolvido possui grande potencial como ferramenta de ensino eficaz em laboratórios escolares ou mesmo na sala de aula, incentivando o aprendizado ativo e a formação de um pensamento crítico e reflexivo por parte dos estudantes. A experimentação, tanto científica quanto didática, continuará sendo um dos pilares para a construção do conhecimento em Ciências, e iniciativas como esta reforçam a importância de investir em abordagens pedagógicas inovadoras para melhorar a qualidade do ensino.

Dada a relevância do desenvolvimento de mecanismos como o apresentado neste trabalho, recomenda-se, como continuidade das pesquisas, a aplicação do produto em diferentes contextos educacionais e a realização de estudos complementares que avaliem sua efetividade em longo prazo. Além disso, sugere-se a criação de formações continuadas para professores, com o objetivo de capacitá-los no uso de tecnologias aplicadas ao ensino experimental. Espera-se que esta iniciativa inspire futuras pesquisas e contribuições voltadas para a melhoria do ensino de Física e demais disciplinas científicas.

REFERÊNCIAS

Artigo de periódicos

BISINOTTO, G. A.; CANCIAN, C. G.; DE OLIVEIRA, L. F. G. Memorial do Projeto De Um Dispositivo Mecânico Autocontrolado Por Encoder Óptico e Controlado Remotamente Via Bluetooth. **Mecatrone**, v. 1, n. 1, 2015. Citado 1 vez na página 43.

CARVALHO, A. M. P. de. Fundamentos teóricos e metodológicos do ensino por investigação. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, p. 765–794, 2018. Citado 1 vez na página 96.

_____. Ensino de ciências por investigação: condições para implementação em sala de aula, 2022. Citado 1 vez na página 96.

CUNHA, F. C. M. et al. Revisitando modos normais de oscilações acopladas com a Teoria Espectral de Grafos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 46, e20240095, 2024. Nenhuma citação no texto.

DOEBELIN, E. O.; MANIK, D. N. Measurement systems: application and design, 2007. Citado 1 vez na página 42.

FERRAZ, W.; OLIVEIRA JUNIOR, A. Sistema optico de aquisicao de sinais de velocidade e posicao de maquinas (encoder incremental com quadratura geometrica). **Anais**, 1992. Citado 1 vez na página 43.

INÁCIO, M. J. Sensores e Atuadores. **Faculdade de Ciências do Tocantins**, 2009. Citado 1 vez na página 44.

LEE, J.; BAGHERI, B.; KAO, H.-A. A cyber-physical systems architecture for industry 4.0-based manufacturing systems. **Manufacturing letters**, Elsevier, v. 3, p. 18–23, 2015. Citado 1 vez na página 42.

ROSSUM, G. van. Guido van Rossum. **Python (programming language) 1 CPython 13 Python Software Foundation 15**, Citeseer, p. 16. Citado 1 vez na página 49.

SILVA, J. L. d. S.; MELO, M. et al. Plataforma Arduino integrado ao PLX-DAQ: Análise e aprimoramento de sensores com ênfase no LM35. **XIV Escola Regional de Computação Bahia, Alagoas e Sergipe (ERBASE)**. Feira de Santana, BA, 2014. Nenhuma citação no texto.

SILVA, R. O. da; ARAUJO, W. M.; CAVALCANTE, M. M. Visão geral sobre microcontroladores e prototipagem com Arduino. **Tecnologias Em Projeção**, v. 10, n. 1, p. 36–46, 2019. Citado 1 vez na página 46.

Artigo de anais de conferência

VAN ROSSUM, G. et al. Python programming language. In: SANTA CLARA, CA, 1. USENIX annual technical conference. [S.l.: s.n.], 2007. v. 41, p. 1–36. Citado 1 vez na página 49.

Livro

GROOVER, M. P. **Automation, production systems, and computer-integrated manufacturing**. [S.l.]: Pearson Education India, 2016. Citado 1 vez na página [42](#).

MARION, J. B. **Classical dynamics of particles and systems**. [S.l.]: Academic Press, 2013. Nenhuma citação no texto.

MCROBERTS, M. **Arduino Básico-2ª edição: Tudo sobre o popular microcontrolador Arduino**. [S.l.]: Novatec Editora, 2015. Citado 2 vezes nas páginas [47](#), [48](#).

THORNTON, S. T.; MARION, J. **Classical dynamics of particles and systems**. [S.l.]: MTM, 2019. Citado 1 vez na página [11](#).

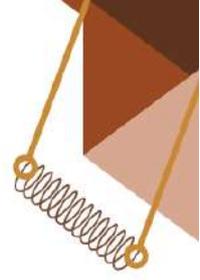
VAN ROSSUM, G.; DRAKE JR, F. L. **Python tutorial**. [S.l.]: Centrum voor Wiskunde en Informatica Amsterdam, The Netherlands, 1995. v. 620. Citado 1 vez na página [49](#).

TCC

TIAGO, L. L. **Projeto de um simulador de atitude com três graus de liberdade**. 2013. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP. Graduação em Engenharia Mecatrônica. Citado 1 vez na página [46](#).

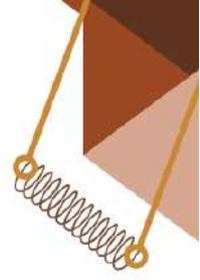
Referências online

RIFKIN, J. **The third industrial revolution**. [S.l.]: Palgrave macmillan, 2011. Citado 1 vez na página [42](#).



APÊNDICES





APÊNDICE A

EXECUTÁVEIS DAS SIMULAÇÕES EM PYTHON



PÊNDELO SIMPLES



Fonte: Autoria própria

PÊNDELO SIMPLES AMORTECIDO



Fonte: Autoria própria

PÊNDELO SIMPLES FORÇADO

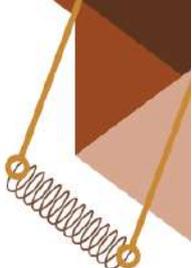


Fonte: Autoria própria

PÊNDELO SIMPLES ACOPLADOS



Fonte: Autoria própria



APÊNDICE B
Código Arduino

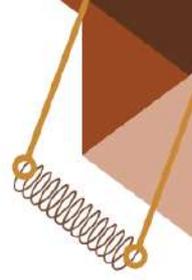


CÓDIGO ARDUÍNO

```
arduino_teste_encoder_ino | Arduino IDE 2.3.3
Arquivo  Editar  Rascunho  Ferramentas  Ajuda
Selegionar Placa

arduino_teste_encoder_ino.ino
1 //Declaração de variáveis globais
2
3 // Define os pinos digitais 2 e 3 como entradas para os sinais do encoder incremental.
4 //Esses pinos receberão os sinais dos canais A e B do encoder.
5 int encoderPin1 = 2;
6 int encoderPin2 = 3;
7 //interruptPin1 = 2; alternativa
8 //interruptPin2 = 3; alternativa
9 volatile int lastEncoded = 0; //Declara que a variável pode mudar inesperadamente (interrupções a alteram).
10 //lastEncoded: Armazena o último estado codificado dos sinais A e B.
11 volatile long encoderValue = 0; //Variável que armazena o valor atual do ângulo ou posição relativa calculada pelo encoder.
12 long lastEncoderValue = 0; //Último valor conhecido de encoderValue, usado para comparação ou cálculos posteriores.
13 int lastMSB = 0; //Armazena o último valor do sinal A do encoder.
14 int lastLSB = 0; //Armazena o último valor do sinal B do encoder.
15
16 void setup() //Inicializa a comunicação serial com velocidade de 9600 bits por segundo para enviar dados ao monitor serial.
17 {
18   Serial.begin(9600);
19   pinMode(encoderPin1, INPUT_PULLUP); // define-se a porta digital como entrada com pull-up ativado (retorna nada)
20   pinMode(encoderPin2, INPUT_PULLUP); // define-se a porta digital como entrada com pull-up ativado (retorna nada)
21   digitalWrite(encoderPin1, HIGH); // Se nenhuma entrada esta presente coloca-se pino 2 como HIGH +5V
22   digitalWrite(encoderPin2, HIGH); // Se nenhuma entrada esta presente coloca-se pino 3 como HIGH +5V
23   attachInterrupt(0, updateEncoder, CHANGE); // chamar a subrotina updateEncoder() quando qualquer mudança alto/baixo seja detectada na
24   //porta e acciona a interrupção (no interrupt 0 (pin 2), ou no interrupt 1 (pin 3))
25   attachInterrupt(1, updateEncoder, CHANGE);
26   // attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(2), updateEncoder, CHANGE); // alternativa
27   // attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(3), updateEncoder, CHANGE); // alternativa
28 }
29
30 //PAGINA 01

31 //Laço principal (loop)
32 //Envia o valor atual de encoderValue (posição calculada) para o monitor serial a cada 50 ms, facilitando a visualização da posição em tempo real.
33 void loop()
34 {
35   Serial.println(encoderValue); //imprime o valor do angulo
36   delay(50);
37 }
38 //*****
39 //Função de interrupção (updateEncoder)
40 void updateEncoder()
41 //Essa função é executada automaticamente quando ocorre uma mudança no sinal do encoder.
42 {
43   int MSB = digitalRead(encoderPin1); //MSB = bit mais significativo. Lê a porta 2 e atribui o valor à variável MSB, poderia ser sinal A = MSB
44   int LSB = digitalRead(encoderPin2); //LSB = bit menos significativo. Lê a porta 3 e atribui o valor à variável LSB, poderia ser sinal B = LSB
45
46   int encoded = (MSB << 1) | LSB; //é aumentado um zero à direita do binário MSB (A), emseguida é comparado com LSB (B) é formado um binário
47   //com os dígitos mais significativos dos dois A e B esse valor atribuído a encoded.
48   int sum = (lastEncoded << 2) | encoded; //é aumentado dois zeros à direita do binário lastEncoded, emseguida é comparado com encoded e formado um
49   //binário com os dígitos mais significativos dos dois esse valor é atribuído a soma.
50
51   if(sum == 0b1101 || sum == 0b0100 || sum == 0b0010 || sum == 0b1011) encoderValue ++; //A partir de qualquer posição, se rotação horária aumentar angulo
52   //em um passo
53   if(sum == 0b1110 || sum == 0b0111 || sum == 0b0001 || sum == 0b1000) encoderValue --; //A partir de qualquer posição, se rotação antihorária diminuir
54   //angulo em um passo
55
56   lastEncoded = encoded; //armazena encoded em lastEncoded para a próxima vez.
57 }
58 //PAGINA 02
```



APÊNDICE C

Slides a serem utilizados na
aplicação do produto e roteiro
de aplicação da SEI



APÊNDICE C1 - SLIDES UTILIZADOS NA
APLICAÇÃO DO PRODUTO



QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO



3

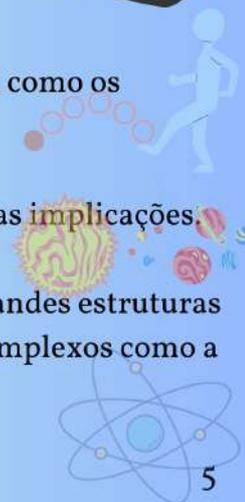
ENCONTRO II



4

O QUE ESTUDA A FÍSICA?

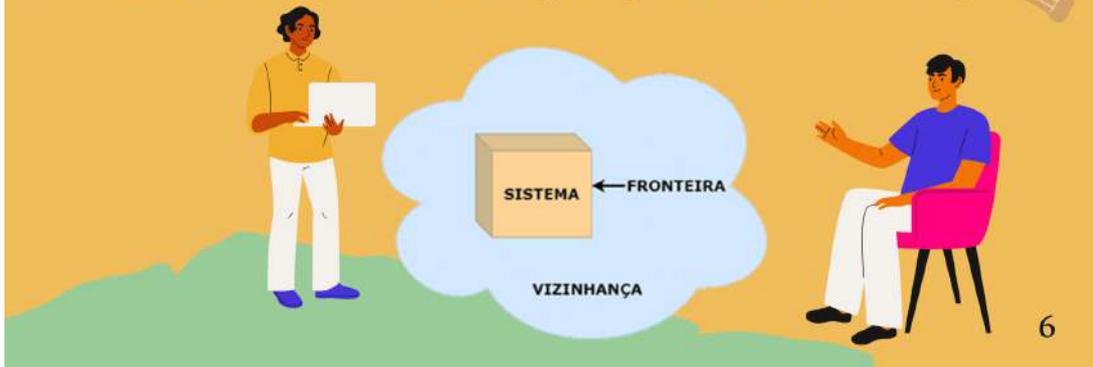
1. Estuda as propriedades fundamentais da natureza, bem como os fenômenos relacionados à matéria e à energia.
2. Busca entender os princípios que regem o universo e suas implicações.
3. Estuda desde minúsculas partículas subatômicas até grandes estruturas cósmicas, desde movimentos simples até fenômenos complexos como a relatividade e a mecânica quântica.



5

SISTEMAS FÍSICOS

Um sistema físico é uma entidade ou conjunto de objetos que podem ser estudados e analisados com base em princípios e leis da física.



6

SISTEMA FÍSICO ABERTO

Um sistema físico aberto é aquele que pode trocar tanto matéria quanto energia com sua vizinhança.



SISTEMA FÍSICO FECHADO

Um sistema físico fechado é aquele que permite apenas a troca de energia com sua vizinhança, mas não troca matéria.

SISTEMA FÍSICO ISOLADO

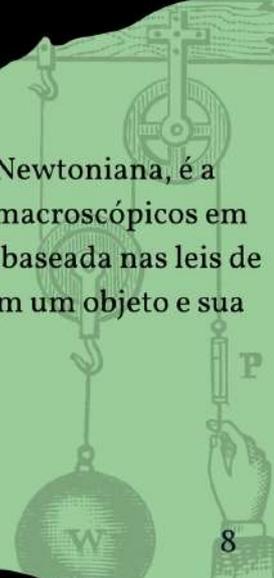
Um sistema físico isolado é aquele que não troca nem matéria nem energia com seu ambiente externo.



7

MECÂNICA

A Mecânica clássica, também conhecida como Mecânica Newtoniana, é a parte da Mecânica que descreve o movimento de objetos macroscópicos em velocidades muito menores que a velocidade da luz. Ela é baseada nas leis de Newton, que descrevem a relação entre a força aplicada em um objeto e sua interferência resultante.



8

MECÂNICA NEWTONIANA

Baseia-se nas leis de Newton, que descrevem a relação entre a força aplicada em um objeto e sua interferência resultante.



9

LEIS DE NEWTON

Força e movimento em ação



10

PRIMEIRA LEI DE NEWTON

I.

Lei da Inércia

Inércia

Força

Um corpo em repouso ou em MRU tende a permanecer em seu estado de repouso ou de MRU a menos que uma força resultante não nula seja aplicada sobre ele.

11



I.

Lei da Inércia

A bola de golfe permanecerá em repouso até que o jogador a acerte.

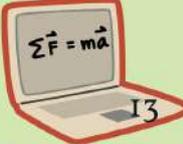
12

SEGUNDA LEI DE NEWTON

2.

Princípio Fundamental da Dinâmica

Afirma que a aceleração de um objeto com massa constante é proporcional à força resultante de todas as forças aplicadas sobre ele e tem o mesmo sentido que a força resultante.



$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

13

2.

Princípio Fundamental da Dinâmica

O carro acelera para frente pois a força do seu motor é maior que o atrito na estrada.



14

TERCEIRA LEI DE NEWTON

3.

Lei da Ação e Reação

Toda força de ação tem uma força de reação de igual intensidade e direção mas em sentido oposto.

15

3.

Lei da Ação e Reação

Em um lançamento de foguete, a espaçonave exerce uma força para baixo, e a força de reação de mesma intensidade a empurra para cima.



16

POR HOJE É SÓ!

A força e o movimento estão relacionados porque o movimento é resultado da força.



O movimento de um objeto depende do equilíbrio das forças que atuam sobre ele.

As Leis de Newton são:

1. Lei da Inércia
2. Princípio Fundamental da Dinâmica
3. Lei da Ação e Reação

17



ENERGIA

Na Física, um dos conceitos fundamentais é o que se refere a energia. Pode ser descrita como a capacidade de um sistema para realização de trabalho. Em outros termos, energia é a perícia de um sistema para produzir mudanças ou efeitos. Ela pode existir em diversas formas, como energia mecânica, energia térmica, energia elétrica, energia química, entre outras.



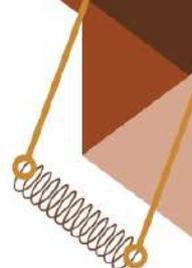
19

ENERGIA MECÂNICA

A energia mecânica é uma forma de energia que está relacionada ao movimento e à posição dos objetos. Ela é a soma da **energia cinética**, que é a energia associada ao movimento dos objetos, e a **energia potencial**, que é a energia mantida nos objetos devido à sua posição ou configuração.

$$E_m = E_c + E_p$$

20



ENERGIA CINÉTICA

A energia cinética de um objeto é definida como a energia que um objeto possui devido ao seu movimento.

Ela depende da massa e da velocidade do objeto, podendo ser calculada pela equação

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

onde m é a massa do objeto e v é o módulo da sua velocidade.

A energia cinética pode ser transformada em outras formas de energia, como a energia térmica, quando um objeto em movimento é freado ou colide com outro objeto.

21

ENERGIA POTENCIAL

A energia potencial, por sua vez, é a energia que um objeto possui devido à sua posição ou configuração em um campo de forças. Ela pode ser gravitacional, elástica, elétrica, magnética, entre outras.

A potencial gravitacional, por exemplo, é a energia armazenada por um objeto devido à sua posição em relação à Terra. Ela é representada pela equação

$$E_{p_g} = mgh$$

onde m é a massa do objeto, g é a aproximação da gravidade e h é a altura do objeto em relação a um ponto de referência.

Já a potencial elástica é a energia armazenada em uma mola ou em um objeto deformável, quando ele é esticado ou comprimido.

$$E_{p_e} = \frac{1}{2}kx^2$$

onde k é a constante elástica do objeto deformável e x é o deslocamento.

22

ENERGIA MECÂNICA

$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Energia Cinética 

$$E_{p_g} = mgh$$

Energia Potencial Gravitacional 

$$E_{p_e} = \frac{1}{2}kx^2$$

Energia Potencial Elástica 

23

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA



A energia não se cria e não se destrói, apenas se transfere ou se transforma em outro tipo de energia, em quantidade iguais.

24

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

Desprezando as forças dissipativas, pode-se afirmar que a energia mecânica se conserva. Nesse caso o sistema é conservativo, isto é somente as forças conservativas atuam na realização de trabalho.



Em um sistema conservativo a energia mecânica total permanece constante qualquer que seja a transformação do sistema.

$$E_{M_i} = E_{M_f}$$

25

POR HOJE É SÓ!

Na ausência de forças dissipativas, a energia mecânica é conservada.

$$E_m = E_c + E_p$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Energia Cinética

$$E_{p_g} = mgh$$

Energia Potencial Gravitacional

$$E_{p_e} = \frac{1}{2}kx^2$$

Energia Potencial Elástica

$$E_{M_i} = E_{M_f}$$

Conservação da Energia Mecânica

26

ENCONTRO IV



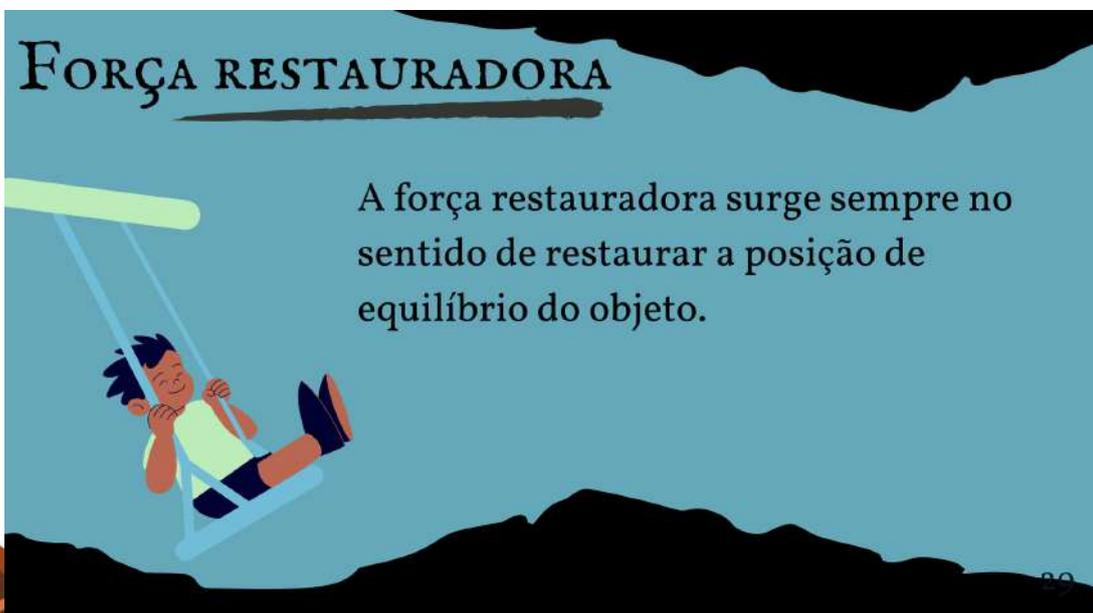
FORÇA

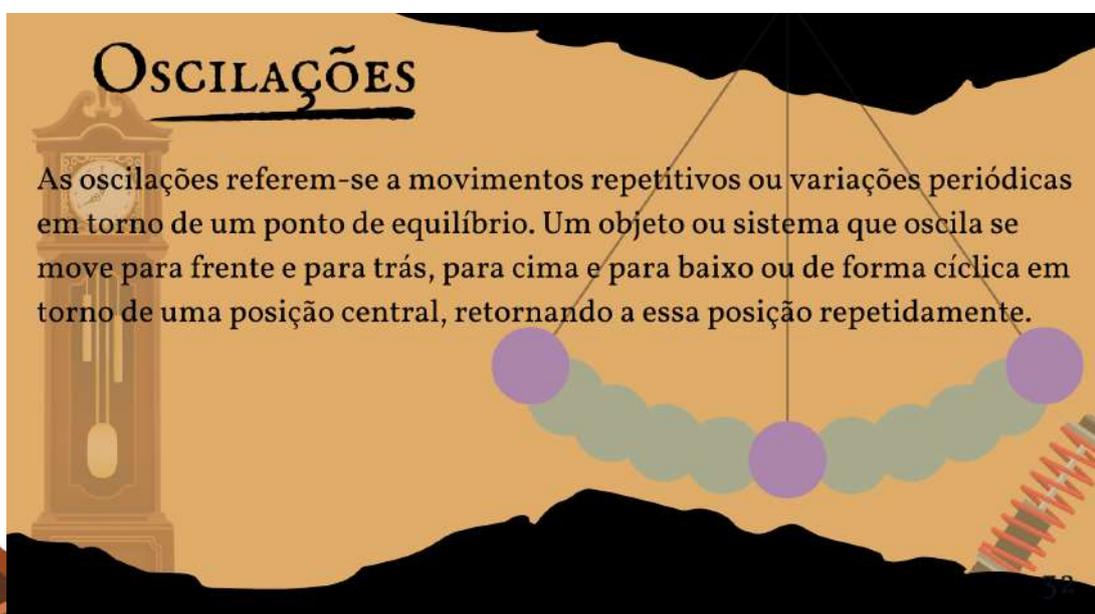
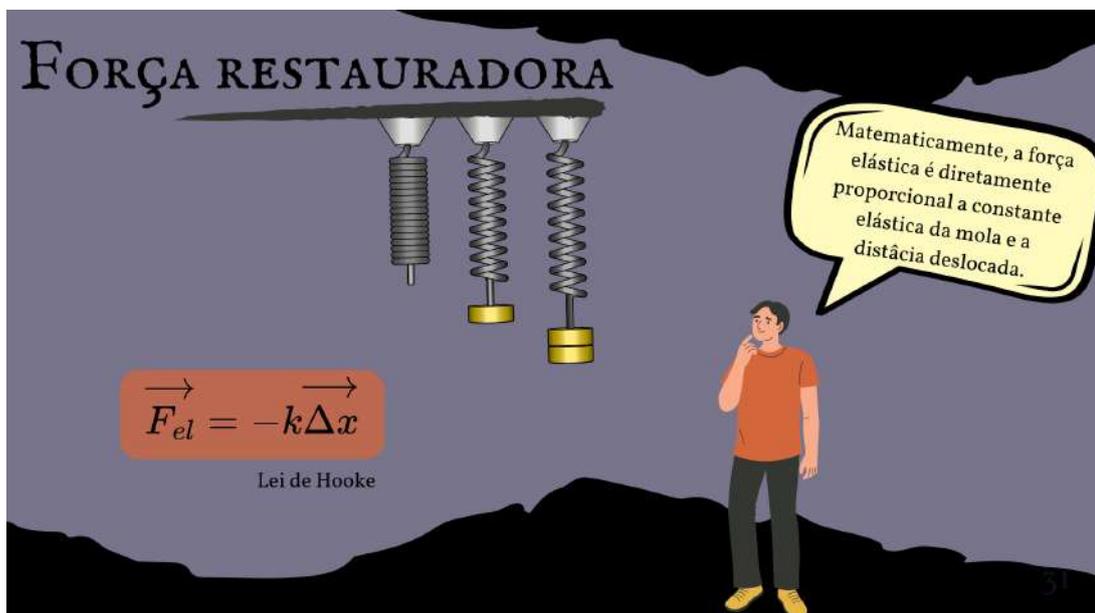
Força é grandeza física vetorial, capaz de alterar o estado de equilíbrio de um corpo, provocar uma deformação ou anular a ação de outra força.



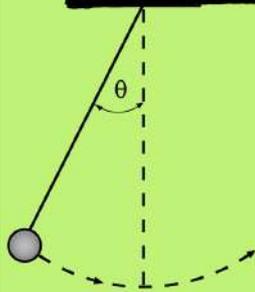
FORÇA RESTAURADORA

A força restauradora surge sempre no sentido de restaurar a posição de equilíbrio do objeto.



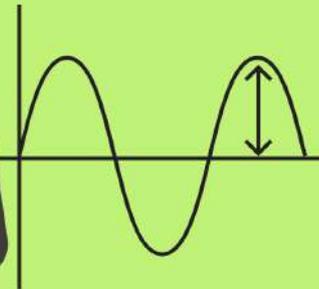


CARACTERÍSTICAS DAS OSCILAÇÕES



AMPLITUDE

É a distância máxima que um objeto se afasta do ponto de equilíbrio.

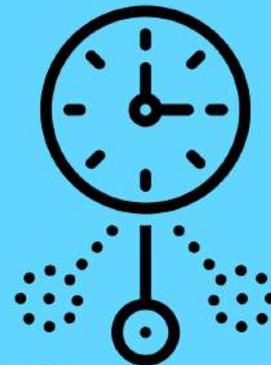


33

CARACTERÍSTICAS DAS OSCILAÇÕES

PERÍODO

O período de uma oscilação é o tempo necessário para que um ciclo completo seja concluído, ou seja, para que o objeto ou sistema volte à posição inicial.



CARACTERÍSTICAS DAS OSCILAÇÕES

FREQUÊNCIA

A frequência é o número de ciclos completos que ocorrem em uma unidade de tempo.





POR HOJE É SÓ!

A força restauradora age no intuito de restaurar a posição de equilíbrio do objeto.

$$\vec{F}_{el} = -k\Delta x$$

As oscilações referem-se a movimentos repetitivos ou variações periódicas em torno de um ponto de equilíbrio.

PERÍODO
AMPLITUDE
FREQUÊNCIA
COMPRIMENTO DE ONDA

37

ENCONTRO V

38

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

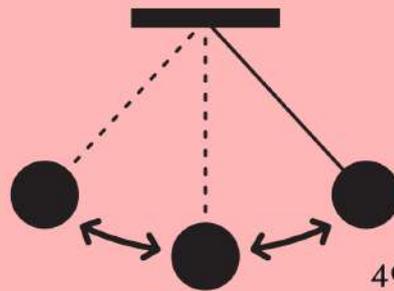
O movimento harmônico simples (MHS) é aquele em que um corpo oscila em torno de uma posição de equilíbrio devido à ação de uma força restauradora, cuja natureza pode ser elástica, gravitacional, elétrica, entre outras.



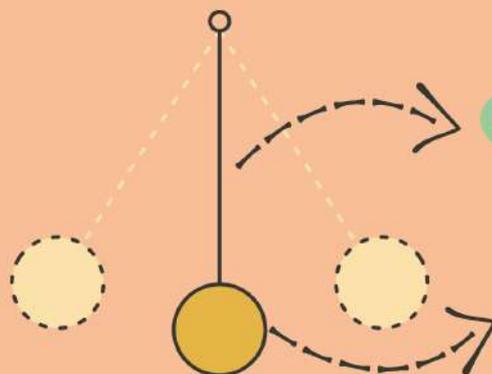
No MHS, não há forças dissipativas, como as forças de atrito e arraste, e, por isso, a energia mecânica total do sistema é conservada.

PENDULO SIMPLES

Um pêndulo simples é um dispositivo mecânico composto por uma massa pontual (ou quase pontual) chamada de "massa pendular" ou "massa suspensa" e um fio inextensível e leve, preso em um ponto fixo.



PENDULO SIMPLES

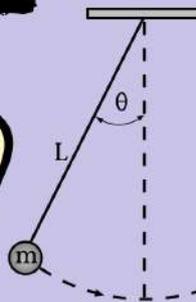


Fio inextensível de massa desprezível

Massa pendular

PENDULO SIMPLES

O pêndulo simples é um modelo teórico que simplifica a análise de oscilações pendulares.



θ é a amplitude.
 m é a massa pendular.
 L é o comprimento do fio.

42

FORÇAS PRESENTES NO PENDULO SIMPLES

A força restauradora no pêndulo simples é a componente da força peso que tangencia a trajetória.

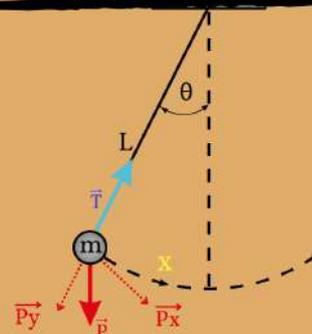
$$\vec{F}_\theta = \vec{P}_x = |\vec{P}| \sin \theta \quad (1)$$

Sua intensidade pode ser escrita como

$$F_\theta = -mg \sin \theta \quad (2)$$

Considerando que para pequenos ângulos $\sin \theta \approx \theta$, então:

$$F_\theta = -mg\theta \quad (3)$$



43

FORÇAS PRESENTES NO PENDULO SIMPLES

Do comprimento do arco S tem-se que

$$x = L\theta$$

ou seja,

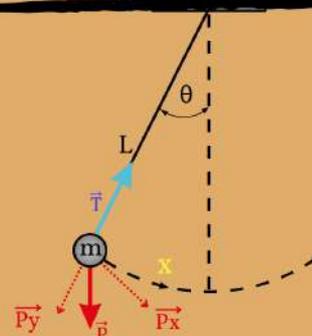
$$\theta = \frac{x}{L} \quad (4)$$

Substituindo a equação 4 na equação 3, Pode-se notar que:

$$F_\theta = -mg \frac{x}{L} \quad (5)$$

Fazendo, $k = \frac{mg}{L}$, chega-se à forma conhecida da intensidade da força restauradora dada pela lei de Hooke.

$$F = -kx \quad (6)$$



44

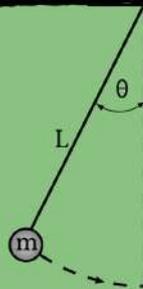
ELEMENTOS DO PENDULO SIMPLES

Período

O período de um pêndulo de pequena amplitude ($\theta \leq 10^\circ$) é diretamente proporcional a raiz quadrada do comprimento (L) e inversamente proporcional a raiz quadrada da aceleração da gravidade (g).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Nesse tipo de pêndulo, o período não depende da amplitude nem da massa pendular.



45

ELEMENTOS DO PENDULO SIMPLES

Velocidade angular

A velocidade angular, ou frequência angular (ω), de um pêndulo simples com amplitude pequena é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

onde k é uma constante dada por $\frac{mg}{L}$, como visto anteriormente e m é a massa pendular.

Então a frequência angular pode ser dada também por $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$



46

ELEMENTOS DO PENDULO SIMPLES

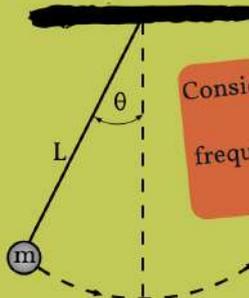
Frequência

A frequência de oscilações para esse tipo de pêndulo pode ser calculado como:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Considerando que $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, então a frequência pode ser expressa por:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$



47

ELEMENTOS DO PENDULO SIMPLES

Por essa relação, nota-se que a frequência é o inverso do período.

$$f = \frac{1}{T}$$

48

POR HOJE É SÓ!

O MHS é um tipo de movimento oscilatório periódico caracterizado por uma força restauradora proporcional ao deslocamento.

O período de oscilação depende do comprimento do fio e da aceleração da gravidade, mas não da massa.

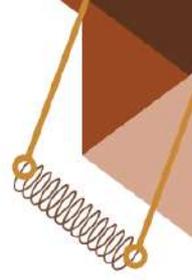
Um pêndulo simples consiste em uma massa suspensa por um fio ou haste sem peso que oscila sob a influência da gravidade. Aproxima-se do MHS quando o ângulo de oscilação é pequeno.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

49

ENCONTRO VI

50



APLICAÇÃO DA SEI

Essa metodologia pedagógica busca estimular a aprendizagem ativa e o desenvolvimento de habilidades científicas nos alunos através de investigações e experimentos práticos realizados em sala de aula.

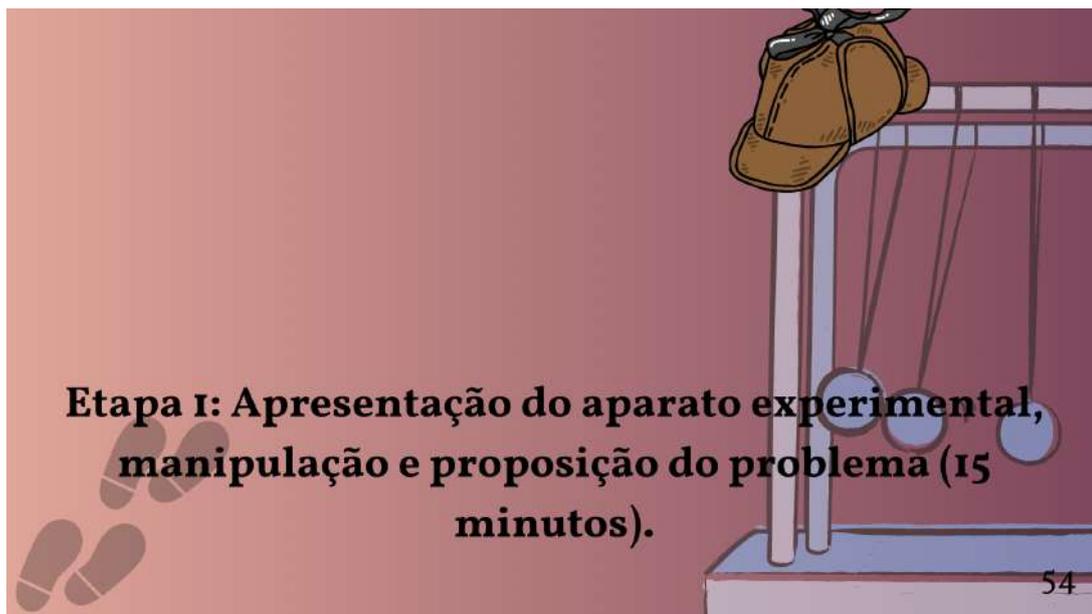
51

SEQUÊNCIA DE ENSINO INVESTIGATIVO

52

OBJETIVO: CONDUZIR UMA INVESTIGAÇÃO ONDE OS ESTUDANTES, EM GRUPOS, APLIQUEM OS CONCEITOS TRABALHADOS NA ABORDAGEM TEÓRICA - ENERGIA, FORÇAS RESTAURADORAS E MOVIMENTOS OSCILATÓRIOS.

53



Etapa 1: Apresentação do aparato experimental, manipulação e proposição do problema (15 minutos).



Etapa 2: Identificação e exploração das hipóteses e previsões dos estudantes (20 minutos).



Etapa 3: Elaboração de planos de ação e execução do planejado (35 minutos).



Etapa 4: Análise dos resultados e revisão das hipóteses (20 minutos).

57

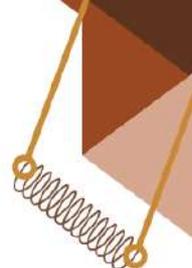


Etapa 5: Discussão e conclusão (20 minutos).

58

APÊNDICE C2 - ROTEIRO DE ATIVIDADE PRÁTICA





**ROTEIRO DE ATIVIDADE PRÁTICA DE MANUSEIO DO APARATO
EXPERIMENTAL– INVESTIGAÇÃO GUIADA COM BASE NA SEI
(SEQUÊNCIA DE ENSINO INVESTIGATIVO) - 1H50MIN.**

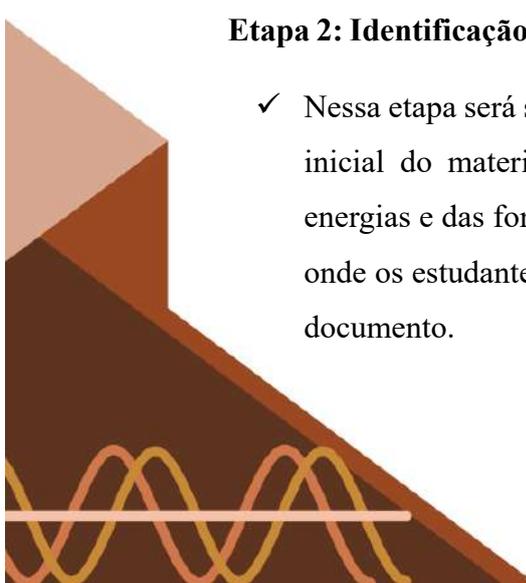
Objetivo: Conduzir uma investigação onde os alunos, em grupos, apliquem os conceitos trabalhados na abordagem teórica - energia, forças restauradoras e movimentos oscilatórios.

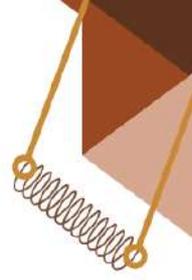
ETAPAS DA ATIVIDADE:

Etapa 1: Apresentação do sistema de osciladores harmônicos acoplados, manipulação e proposição do problema (15 minutos).

- ✓ Proposição dos problemas investigativos:
 - Grupo 01: Como a energia mecânica total do sistema (cinética + potencial) se comporta durante o movimento oscilatório dos pêndulos acoplados?
 - Grupo 02: Como as energias cinética e potencial dos pêndulos variam durante o movimento oscilatório?
 - Grupo 03: Como a força elástica da mola varia em relação ao deslocamento causado pelo movimento dos pêndulos?
 - Grupo 04: De que forma o comprimento das hastes dos pêndulos influencia o período de oscilação do sistema?
 - Grupo 05: Como o movimento oscilatório de um dos pêndulos influencia o outro, devido ao acoplamento pela mola?
 - Grupo 06: Como a amplitude de oscilação dos pêndulos varia ao longo do tempo, e o que isso indica sobre a dissipação de energia no sistema?

Etapa 2: Identificação e exploração das hipóteses e previsões dos alunos (20 minutos)

- ✓ Nessa etapa será solicitado aos grupos que, com base na observação e manipulação inicial do material, façam previsões ou hipóteses sobre o comportamento das energias e das forças nos sistemas, de acordo com o problema recebido. O arquivo onde os estudantes descreverão suas hipóteses está disponível no apêndice A desse documento.
- 



Etapa 3: Elaboração de planos de ação e execução do planejado (35 minutos)

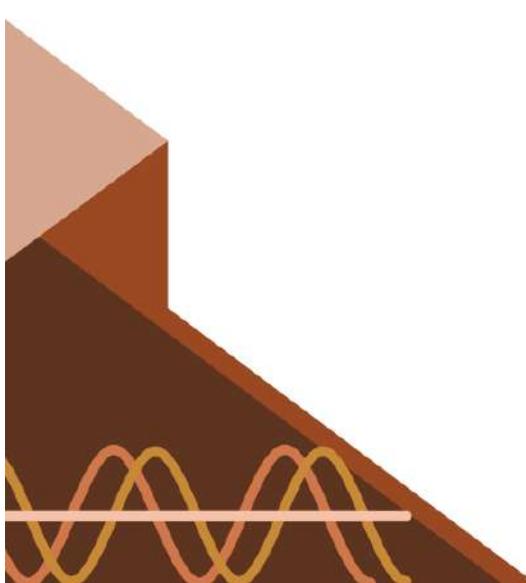
- ✓ Após a etapa anterior, cada grupo escolhe uma ou mais hipóteses para investigar em detalhe. Eles devem refletir sobre como essas hipóteses podem ser testadas experimentalmente.
- ✓ Cada grupo elabora um plano detalhado de como vai testar suas hipóteses. O plano inclui: como medir as variáveis envolvidas (tempo de oscilação, deslocamento da mola, etc.); quais fatores serão mantidos constantes; como garantir a repetição do experimento para obter resultados mais precisos, entre outras possibilidades. Um modelo do plano a ser elaborado pelos grupos segue no apêndice 2 desse documento.
- ✓ Os grupos começam a realizar os experimentos planejados.

Etapa 4: Análise dos resultados e revisão das hipóteses (20 minutos)

- ✓ Após a coleta dos dados, os alunos organizam as informações e comparam os resultados experimentais com as suas previsões.

Etapa 5: Discussão e conclusão (20 minutos)

- ✓ Cada grupo apresenta os resultados de suas investigações explicando o problema recebido, a hipótese que investigaram, o procedimento experimental e as conclusões obtidas a partir dos dados.



APÊNDICE 1 – PROBLEMAS E HIPÓTESES

ETAPA 1: APRESENTAÇÃO DO APARATO EXPERIMENTAL, MANIPULAÇÃO E PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA

Grupo: _____

Problema:

_____.

ETAPA 2: IDENTIFICAÇÃO E EXPLORAÇÃO DAS HIPÓTESES E PREVISÕES DOS ALUNOS

Hipóteses do grupo:

_____.

APÊNDICE 2 – MODELO DE PLANO DE AÇÃO

ETAPA 3: ELABORAÇÃO DE PLANO DE AÇÃO E EXECUÇÃO DO PLANEJADO

Plano de Ação do Grupo:

1- Identificação do grupo e do problema investigativo

Nome do grupo: _____

Problema investigativo: _____

2- Hipóteses a serem testadas

Hipótese 1: _____

Hipótese 2 (*opcional*): _____

3- Variáveis envolvidas

Variável independente (*o que será alterado*): _____

Variável dependente (*o que será medido*): _____

Variáveis controladas (*o que será mantido constante*): _____

4- Métodos e instrumentos de medida

- Variável a medir: _____
- *Instrumento utilizado*: _____
- *Unidade de medida*: _____
- *Como será medida?* _____

5- Descrição do experimento

Passos para realizar o experimento (listados em sequência):

1- _____

2- _____

3- _____

4- _____

5- _____

Quantas vezes o experimento será repetido para garantir a precisão dos dados? _____

6- Registro dos dados (*Como os dados obtidos serão registrados? (ex.: tabela, gráficos, anotações)*)

7- Previsão dos resultados esperados (*baseada nas hipóteses*)

8- Observações adicionais

SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA (SBF)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS (UFNT) - POLO 61
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA (MNPEF)
COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR (CAPES)